Analysis : Wiederholung

1. Fehlerrechnung mit totalem Differential
   Gegeben seien die Funktion
   $$z = f(x, \alpha, \beta) = \frac{x \cdot \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta}$$
   sowie die Werte $x_0 = 20$, $\alpha_0 = 60^o$ und $\beta_0 = 15^o$. x , α und β seien mit den Messungenauigkeiten $dx = \pm 1$, $d\alpha = \pm 1^0$ und $d\beta = \pm 1^0$ behaftet. Berechnen Sie

   (a) eine Schätzung z_0 von z ,
   (b) die partiellen Ableitungen z_x , z_α und z_β von z bei (x_0, α_0, β_0) ,
   (c) den maximalen absoluten Fehler sowie den relativen Fehler.

2. Differentialgleichung
   Gegeben sei die DGL $y' = -2xy^2$. Ermitteln Sie

   (a) die allgemeine Lösung y der DGL,
   (b) die Lösung y der DGL mit $y = \frac{1}{2}$ bei $x_0 = -1$,
   (c) eine RUNGE-KUTTA-Näherung $\mathbf{y_1}$ für den Wert y bei $x = 0$. Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = -1$ und die Schrittweite $h = 1$.
   (d) Zeichnen Sie das Richtungsfeld mittels Isoklinen für $(c = 2, c = 1, c = 0, c = -1, c = -2)$

3. Differentialgleichung
   Gegeben sei die DGL $2x^2y' - 4xy - 3x^2 = y^2$. Ermitteln Sie die Lösung mittels Substitution.

4. Ebene Kurve
   Durch die Gleichung
   $$\mathcal{C} \ : \ r = 1 + \cos \phi = 2\cos^2 \frac{\phi}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$
   ist eine ebene Kurve (**Kardioide**) $\mathcal{C}$ in Polarkoordinatendarstellung gegeben. Ermitteln Sie die Länge L von $\mathcal{C}$ im Intervall $[0, \pi]$ und den Inhalt A der von $\mathcal{C}$ umschlossenen Fläche im Intervall $[0, 2\pi]$.

5. Ebene Kurve
   Gegeben sei die geschlossene Kurve
   $$\mathcal{C} \ : \ x = t^2 - 1 \quad \text{und} \quad y = t \cdot (t^2 - 1) \quad \text{mit} \quad t \in [-1, 1]$$
   Skizzieren Sie $\mathcal{C}$ und ermitteln Sie den Inhalt A der von $\mathcal{C}$ umschlossenen Fläche.

6. Fourier-Reihe
   Gegeben sei die gerade 2π-perodische Funktion $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ für $0 < x < \pi$.

   (a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in (-\pi, 3\pi)$.
   (b) Ermitteln Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n.
   (c) Wie lautet das *Fourier-Polynom* $F_2(x)$?

7. Funktion von zwei Variablen
   Gegeben sei die Funktion: $f(x, y) = x^2 + y^2$. Prfen Sie, ob im Inneren des Dreiecks ein Extremwert vorliegt. Berechnen Sie das Maximum und Minimum der Funktion auf dem Rand des Dreiecks A(1,1), B(5,1) und C(5,3).

8. Komplexe Zahlen
   Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 5j$, $z_2 = -1 + 3j$ und $z_3 = 5e^{j30^o}$. Berechnen Sie
   $$z = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_3 + \frac{1}{z_2}}$$

Lösung : Wiederholung

1. Fehlerrechnung mit totalem Differential
   Gegeben seien die Funktion
   $$z = f(x, \alpha, \beta) = \frac{x \cdot \tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\beta}$$
   sowie die Werte $x_0 = 20$, $\alpha_0 = 60^o$ und $\beta_0 = 15^o$. x , α und β seien mit den Messungenauigkeiten $dx = \pm 1$, $d\alpha = \pm 1^0$ und $d\beta = \pm 1^0$ behaftet.

   (a) $z_0 = 17.32050808$

   (b) $z_x = \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}$, $z_\alpha = \frac{x\cdot(1+\tan^2\alpha)\cdot\tan\beta}{(\tan\alpha+\tan\beta)^2}$, $z_\beta = -\frac{x\cdot\tan\alpha\cdot(1+\tan^2\beta)}{(\tan\alpha+\tan\beta)^2}$
   $z_x(x_0, \alpha_0, \beta_0) = 0.8660254040, z_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0) = 5.35898384, z_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) = -9.282032308$

   (c) Maximaler absoluter Fehler: 1.121559342
   Relativer Fehler: 6.475325882%

2. Differentialgleichung
   Gegeben sei die DGL $y' = -2xy^2$.

   (a) $y = \frac{1}{x^2+K}$

   (b) $y_s = \frac{1}{x^2+1}$, $y_s(0) = 1$

   (c) $k_1 = 0.500000, k_2 = 0.562500, k_3 = 0.610352, k_4 = 0.000000$
   $y_1 = 0.974284$

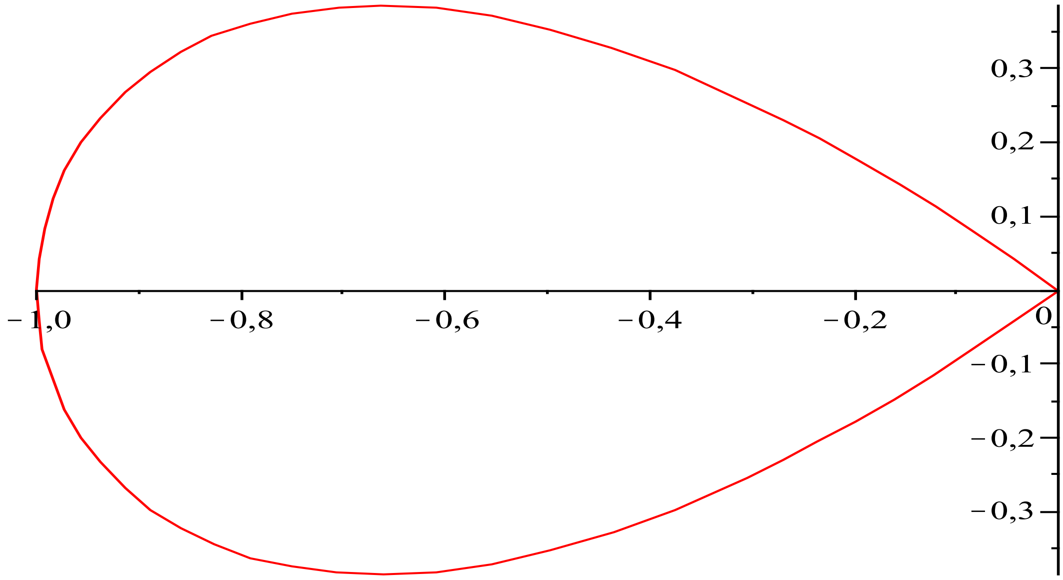
   (d)

3. Differentialgleichung
   Gegeben sei die DGL $2x^2y' - 4xy - 3x^2 = y^2$. Ermitteln Sie die Lösung mittels Substitution.
   $y = x \cdot \left(-1 + \sqrt{2}\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(x) + K\right)\right)$

4. Ebene Kurve
   Durch die Gleichung
   $$\mathcal{C} \; : \; r = 1 + \cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2} \quad \text{und} \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$
   ist eine ebene Kurve (**Kardioide**) $\mathcal{C}$ in Polarkoordinatendarstellung gegeben.
   Länge L von $\mathcal{C}$ im Intervall $[0, \pi]$: $s = 4$.
   Inhalt A der von $\mathcal{C}$ umschlossenen Fläche im Intervall $[0, 2\pi]$: $A = \frac{3}{2}\pi$.

5. Ebene Kurve
   Gegeben sei die geschlossene Kurve

$$\mathcal{C} \;:\; x = t^2 - 1 \quad \text{und} \quad y = t \cdot (t^2 - 1) \quad \text{mit} \quad t \in [-1, 1]$$



   Fläche: A=$\frac{8}{15}$

6. Fourier-Reihe
   Gegeben sei die gerade 2π-perodische Funktion $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ für $0 < x < \pi$.

   (a)

   (b) $b_n = 0$,$a_0 = 0.9567860818$, n gerade: $a_n = \frac{-e^{-\pi}+1}{1+n^2}$, n ungerade: $a_n = \frac{e^{-\pi}+1}{1+n^2}$

   (c) $F_2(x) = \frac{-e^{-\pi}+1}{2} + \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cos x + \frac{-e^{-\pi}+1}{5}\cos(2x) = 0.4784 + 0.5216\cos x + 0.1914\cos(2x)$

7. Funktion von zwei Variablen
   Gegeben sei die Funktion: $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   Extremwert ist bei E(0/0/0). Er befindet sich nicht im Inneren des Intervalls.
   Maximum auf dem Rand: oberhalb von Punkt C, Max(5/3/34)
   Minimum auf dem Rand: oberhalb von Punkt A, Min(1/1/2)

8. Komplexe Zahlen
   Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 5j$, $z_2 = -1 + 3j$ und $z_3 = 5e^{j30^o}$. Berechnen Sie

$$z = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_3 + \frac{1}{z_2}} = 1.864556674 + 5.330480695j$$