Analysis II: Übungsblatt Differentialgeometrie

1. Gegeben sei die Kardioide (Herzkurve) in Parameterform

$$C : x(t) = 2(2\cos t - \cos(2t)), y(t) = 2(2\sin t - \sin(2t)), 0 \leq t < 2\pi.$$

   (a) Berechnen Sie die Kurvenpunkte für $0 \leq t < 2\pi, \Delta t = \frac{\pi}{6}$ und zeichnen Sie die Kurve.

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von C.

2. Gegeben sei die archimedische Spirale in Polarkoordinaten $C : r(\varphi) = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

   (a) Zeichnen Sie die Kurve mithilfe folgender Winkel: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$

   (b) Berechnen Sie den Sektor-Flächeninhalt von C für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

   (c) Berechnen Sie die Bogenlänge von C.

3. Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurve $C : x(t) = t^2, y(t) = t - \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0, T]$

4. Welche Länge hat $y(x) = 2x^2$ im Interval $[0; 2]$?

5. Welche Krümmung hat die Kurve mit der Gleichung $r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$ im Punkt $P_0 = (\varphi_0 = \frac{\pi}{6})$?

6. Berechnen Sie den Krümmungsradius im Scheitelpunkt der Parabel $y = ax^2$

7. Gegeben sei die Kurve $C : x = \cos t, y = sin(3t), 0 \leq t \leq \pi$ in Parameterdarstellung

   (a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Kurve C und geben Sie die zugehörigen Parameterwerte t sowie die Werte der Nullstellen x(t) an.

   (b) Ermitteln Sie die Parameterwerte t_h, für die die Tangente horizontal und die Parameterwerte t_v, für die die Tangente vertikal ist. Geben Sie außerdem die zugehörigen x, y Werte an.

   (c) Berechnen Sie die Krümmung κ, den Krümmungskreisradius und -mittelpunkt für $t = \pi/2 = 90^o$.

   (d) Zeichnen Sie C und den Krümmungskreis aufgrund der obigen Erkenntnisse mit dem Maßstab 1 LE = 5 cm.

Analysis II: LÖSUNGEN: Differentialgeometrie

1. Gegeben sei die Kardioide (Herzkurve) in Parameterform

$$C: x(t) = 2(2\cos t - \cos(2t)), y(t) = 2(2\sin t - \sin(2t)), 0 \le t < 2\pi.$$

(a)

t	x	y
0	2	0
$\frac{\pi}{6}$	2,46	0,27
$\frac{\pi}{3}$	3	1,73
$\frac{\pi}{2}$	2	4
$\frac{2\pi}{3}$	-1	5,19
$\frac{5\pi}{6}$	-4,46	3,73
π	-6	0
$\frac{7\pi}{6}$	-4,46	-3,73
$\frac{4\pi}{3}$	-1	-5,19
$\frac{3\pi}{2}$	2	-4
$\frac{5\pi}{3}$	3	-1,73
$\frac{11\pi}{6}$	2,46	-0,27
2π	2	0

(b) $A = 24\pi$

2. Gegeben sei die archimedische Spirale in Polarkoordinaten $C: r(\varphi) = \varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

(a)

(b) $A = \dfrac{4\pi^3}{3} = 41,34$

(c) $s = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\text{arsinh}(2\pi)$= 21,26

3. $s = T + \dfrac{T^3}{3}$

4. $s = \sqrt{65} + \dfrac{1}{8}\text{arsinh}(8) = 8{,}41$

5. $r(\frac{\pi}{6}) = a, \dot{r}(\frac{\pi}{6}) = -a\sqrt{3} = -1,732a, \ddot{r}(\frac{\pi}{6}) = -5a \implies \kappa = \dfrac{3}{2a}$

6. $\kappa = 2a$

7. Gegeben sei die Kurve $C: x = \cos t, y = sin(3t), 0 \le t \le \pi$ in Parameterdarstellung

(a) $t_{01} = 0, x_{01} = 1; t_{02} = \frac{\pi}{3}, x_{02} = \frac{1}{2}; t_{03} = \frac{2\pi}{3}, x_{03} = -\frac{1}{2}; t_{04} = \pi, x_{04} = -1;$

(b) $t_{h1} = \frac{\pi}{6}, x_{h1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_{h1} = 1; t_{h2} = \frac{\pi}{2}, x_{h2} = 0, y_{h2} = -1; t_{h3} = \frac{5\pi}{6}, x_{h3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, y_{h3} = 1;$
$t_{v1} = 0, x_{v1} = 1, y_{v1} = 0; t_{v2} = \pi, x_{v1} = -1, y_{v2} = 0;$

(c) $\kappa = -9$; Radius: $r = \dfrac{1}{9}$; Mittelpunkt: $x_m = 0, y_m = -\dfrac{8}{9}$