Analysis II: Übungsblatt DGL Systeme 1. Ordnung

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t)+z(t)\\ \dot{y}(t) &= x(t)+z(t)\\ \dot{z}(t) &= x(t)+y(t)\end{aligned}$$

   $x(0)=2$, $y(0)=1$ und $z(0)=6$

2. Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\vec{y}.$$

3. Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}\vec{x}.$$

4. Lösen Sie das inhomogene System mittels Aufsuchen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -5x-7y+e^t\\ \dot{y}(t) &= 2x+4y+1\end{aligned}$$

5. Formen Sie folgende Differentialgleichungen in ein System 1. Ordnung um (Zustandsform)

   (a) $\ddot{x}+5\dot{x}+x=\sin(t)$

   (b) $y'''' - y'' + 3y = e^{-x}$

   (c) Punktpendel (nichtlinear)

$$m\cdot l^2\cdot\ddot{\varphi}(t) = -m\cdot g\cdot l\cdot\sin(\varphi(t))$$

   l : Länge des Fadens, m : Masse, $\varphi(t)$: Winkel in Abhängigkeit der Zeit

Analysis II: LÖSUNGEN: Übungsblatt DGL Systeme 1. Ordnung

1.
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} = +1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t}$$

2. Komplexes Fundamentalsystem:
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+j \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+2j)x}, \begin{pmatrix} 1-j \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1-2j)x} \right\}$$
Allgemeine reelle Lösung:
$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} \sin(2x)+\cos(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \cdot e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(2x)-\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \cdot e^{x}$$

3. Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = 5$,
Eigenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Fundamentallösung: $\vec{x_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$
Hauptvektor: $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, Fundamentallösung: $\vec{x_w} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{5t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$
Allgemeine Lösung: $\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$

4. Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$
Eigenvektoren: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ansatz für inhomogenes System:
$$\begin{aligned} x_p &= Ae^t + a_0 \\ y_p &= Be^t + b_0 \end{aligned}$$
oder vektoriell geschrieben:
$$\vec{u_p} = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$
Partikuläre Lösung:
$$\begin{aligned} x_p &= \frac{3}{4}e^t + \frac{7}{6} \\ y_p &= -\frac{1}{2}e^t + -\frac{5}{6} \end{aligned}$$
Allgemeine Lösung:
$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1e^{2t} - 7C_2e^{-3t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{7}{6} \\ y(t) &= C_1e^{2t} + 2C_2e^{-3t} + -\frac{1}{2}e^t + -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

5. Zustandsformen

(a)
$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - 5z_2 + \sin(t) \end{aligned}$$
oder
$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= -3z_1 - z_3 + e^{-x} \end{aligned}$$

oder

$$\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l} \cdot \sin\left(z_1(t)\right) \end{aligned}$$