**Analysis II: Lösung zu Aufgabe 7: Übungsblatt DGL 1. Ordnung**

**7a)** $y' = \dfrac{x^2 + 5\,y^2}{3\,x\,y} = \frac{1}{3}\frac{x}{y} + \frac{5}{3}\frac{y}{x}$

1. Verfahren: Substitution

$$u = \frac{y}{x} \implies f(u) = \frac{1}{3}\frac{1}{u} + \frac{5}{3}u$$

Einsetzen in Formel:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{u} + \frac{5}{3}u - u}{x} \\ \implies u' &= \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{u} + 2u}{x} \end{aligned}$$

2. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{u}+2u}{x} \\ \implies \int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{u}+2u} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \implies \int \frac{\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}+u^2}\mathrm{d}u &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \implies \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+u^2\right) &= \frac{1}{3}(\ln|x| + \ln|C|) \\ \implies \ln\left(\frac{1}{2}+u^2\right) &= \frac{4}{3}\ln|Cx| \\ \implies \ln\left(\frac{1}{2}+u^2\right) &= \ln|Cx|^{\frac{4}{3}} \\ \implies \frac{1}{2}+u^2 &= (C^*x)^{\frac{4}{3}} \\ \implies u^2 &= (C^*x)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Rücksubstitution

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2} &= (C^*x)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \\ \implies y^2 &= Kx^{\frac{10}{3}} - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$y_1 = \sqrt{Kx^{\frac{10}{3}} - \frac{1}{2}x^2}, \quad y_2 = -\sqrt{Kx^{\frac{10}{3}} - \frac{1}{2}x^2}$$

**7b)** $x\,y' - y = x^2\,\cos x$, AB: $y(\pi) = 2\pi$

**Verfahren: Variation der Konstanten**

Normalform der linearen Differentialgleichung:

$$y' - \frac{y}{x} = x\,\cos x$$

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_h' - \tfrac{y_h}{x} &= 0 \\ \Longrightarrow y_h &= Ce^{-\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x} \\ \Longrightarrow y_h &= Ce^{\ln|x|} \\ \Longrightarrow y_h &= Kx \end{aligned}$$

2. Variation der Konstanten
   (a) $y = K(x)x$
   (b) Ableiten und Einsetzen:

$$\begin{aligned} y' &= K'(x)x + K(x) \\ \Longrightarrow x(K'(x)x + K(x)) - K(x)x &= x^2\cos x \\ \Longrightarrow x^2K'(x) &= x^2\cos x \\ \Longrightarrow K'(x) &= \cos x \end{aligned}$$

   (c) Integrieren

$$K(x) = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

   (d) Allgemeine Lösung

$$y = (\sin x + C)x = x\sin x + Cx$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} y(\pi) &= 2\pi \\ \Longrightarrow \pi sin\pi + C\pi &= 2\pi \\ \Longrightarrow C\pi &= 2\pi \\ \Longrightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$y_s = x\sin x + 2x$$

**7c)** $y' - 4y = 5\sin x$

**Verfahren: Aufsuchen der partikulären Lösung (Var. der Konstanten wäre auch mglich)**

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h = Ke^{4x}$$

2. Aufsuchen der partkulären Lösung

   (a) Ansatzfunktion

$$\begin{aligned} y_p &= C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ y'_p &= C_1 \cos x - C_2 \sin x \end{aligned}$$

   (b) Einsetzen

$$\begin{aligned} C_1 \cos x - C_2 \sin x - 4(C_1 \sin x + C_2 \cos x) &= 5\sin x \\ \Longrightarrow (C_1 - 4C_2)\cos x(-4C_1 - C_2)\sin x &= 5\sin x \end{aligned}$$

   (c) Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} C_1 - 4C_2 &= 0 \\ -4C_1 - C_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow C_1 = -\frac{20}{17}, \quad C_1 = -\frac{5}{17}$$

   (d) Partikuläre Lösung

$$y_p = -\frac{20}{17}\sin x - \frac{5}{17}\cos x$$

3. Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = Ke^{4x} - \frac{20}{17}\sin x - \frac{5}{17}\cos x$$

**7d)** $y' \sin x = y \ln y$, AB: $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

**Verfahren: Trennung der Variablen**

$$\begin{aligned}
& y' && = \frac{y \ln y}{\sin x} \\
\Longrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = \frac{y \ln y}{\sin x} \\
\Longrightarrow\ & \int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} && = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \\
\Longrightarrow\ & \ln |\ln |y|| && = \ln |\tan \tfrac{x}{2}| + \ln |C| \\
\Longrightarrow\ & \ln |\ln |y|| && = \ln |C \tan \tfrac{x}{2}| \\
\Longrightarrow\ & \ln |y| && = K \tan \tfrac{x}{2} \\
\Longrightarrow\ & y && = \pm e^{K \tan \frac{x}{2}} \\
& && \phantom{=}\ \text{aus der AB folgt:} \\
\Longrightarrow\ & y && = +e^{K \tan \frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
& y(\tfrac{\pi}{2}) && = 1 \\
\Longrightarrow\ & e^{K \tan \frac{\pi}{4}} && = 1 \\
\Longrightarrow\ & K && = 0
\end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$y_s = 1$$

**7e)** $\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t} + (2\sin t)\mathrm{i} = \sin(2t)$, AB: $\mathrm{i}(0) = 0$

**Verfahren: Variation der Konstanten**

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t} + (2\sin t)\mathrm{i} &= 0\\ \Longrightarrow \mathrm{i}_h &= Ke^{-\int 2\sin t \mathrm{d}t}\\ \Longrightarrow \mathrm{i}_h &= Ke^{2\cos t}\end{aligned}$$

2. Variation der Konstanten

   (a) $\mathrm{i} = K(t)e^{2\cos t}$

   (b) Ableiten und Einsetzen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t} &= \dot{K}(t)e^{2\cos t} + K(t)(-2\sin t)e^{2\cos t}\\ \Longrightarrow \dot{K}(t)e^{2\cos t} + K(t)(-2\sin t)e^{2\cos t} + (2\sin t)K(t)e^{2\cos t} &= \sin(2t)\\ \Longrightarrow \dot{K}(t)e^{2\cos t} &= \sin(2t)\\ \Longrightarrow \dot{K}(t) &= \sin(2t)\, e^{-2\cos t}\end{aligned}$$

   (c) Integrieren (Verfahren Substitution mit $u = -\cos t$)

$$\begin{aligned}K(t) = &\int \sin(2t)\, e^{-2\cos t}\mathrm{d}t = 2\int \sin t\, \cos t\, e^{-2\cos t}\mathrm{d}t\\ = &-2\int ue^{2u}\mathrm{d}u = (-2)(\tfrac{e^{2u}}{2}u - \tfrac{e^{2u}}{4}) + C\\ = &\; e^{-2\cos t}\cos t + \tfrac{1}{2}e^{-2\cos t} + C\end{aligned}$$

   (d) Allgemeine Lösung

$$\mathrm{i} = (e^{-2\cos t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-2\cos t} + C)\, e^{2\cos t} = \cos t + \frac{1}{2} + Ce^{2\cos t}$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(0) &= 0\\ \Longrightarrow \cos 0 + \tfrac{1}{2} + Ce^{2\cos 0} &= 0\\ \Longrightarrow 1 + \tfrac{1}{2} + Ce^{2} &= 0\\ \Longrightarrow Ce^{2} &= -\tfrac{3}{2}\\ \Longrightarrow C &= -\tfrac{3}{2}e^{-2}\end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$\mathrm{i}_s = \cos t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2}e^{2\cos t} = \cos t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2+2\cos t}$$