## Analysis II: Übungsblatt DGL 1. Ordnung

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen
   (a) $x\,y' - a\,y' - y + b = 0$
   (b) $y' - \dfrac{x}{y} = 0$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Substitution
   (a) $y' = 3\,x + y$
   (b) $y' = \dfrac{x\,y + y^2}{x^2}$

3. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DGL $y' = \dfrac{x-y}{x}$ mit Hilfe von Isoklinen im 1. Quadranten. Zeichnen Sie die partikuläre Lösung ein, die durch den Punkt P(1,1) geht ein.

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen DGLn 1. Ordnung. Lösen Sie zusätzlich die Anfangswertaufgaben.
   (a) $y' + 3\,y = 0$, AB: $y(0) = 2$
   (b) $y' - \dfrac{y}{2} = 0$, AB: $y(-2) = 1$
   (c) $y' = 0$, AB: $y(0) = 3$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten
   (a) $y' + \dfrac{y}{1+x} = e^{(2\,x)}$
   (b) $y' \cos(x) - y \sin(x) = 1$

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Aufsuchen einer partikulären Lösung
   (a) $y' = 2\,x - y$
   (b) $y' + y = e^{(-x)}$

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe durch ein Verfahren Ihrer Wahl.
   (a) $y' = \dfrac{x^2 + 5\,y^2}{3\,x\,y}$
   (b) $x\,y' - y = x^2 \cos(x)$, AB: $y(\pi) = 2\pi$
   (c) $y' - 4\,y = 5 \sin(x)$
   (d) $y' \sin(x) = y \ln(y)$, AB: $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
   (e) Ein Stromkreis mit einem zeitabhängigen ohmschen Widerstand werde durch die DGL 1. Ordnung $\frac{di}{dt} + 2\sin(t)\,\mathrm{i} = \sin(2\,t)$ beschrieben.Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i$ für den Anfangswert $i(0) = 0$.

8. Bestimmen Sie mittels des Runge-Kutta-Verfahrens die Lösung von $y' = \sin x + y$ (AB: $y(0) = 0$) an der Stelle $x = 0,5$. Die Schrittweite sei $h = 0,25$.

## Analysis II: LÖSUNGEN: Übungsblatt DGL 1. Ordnung

1. Lösungen (durch Trennung der Variablen):
   (a) $y = C(x-a) + b$
   (b) $y^2 - x^2 = C$ oder $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$
2. Lösungen (durch Substitution):
   (a) $y = -3\,x - 3 + Ce^x$
   (b) $y = \dfrac{x}{-\ln(x) + C}$
3.
4. Lösungen:
   (a) $y = C\,e^{-3\,x}$, $y_p = 2\,e^{-3\,x}$
   (b) $y = C\,e^{\frac{x}{2}}$, $y_p = e^{(\frac{x}{2}+1)}$
   (c) $y = C$,$y_p = 3$
5. Lösungen (durch Variation der Konstanten):
   (a) $y = \dfrac{\frac{1}{2}\,e^{2\,x}\,x + \frac{1}{4}\,e^{2\,x} + C}{1+x}$
   (b) $y = \dfrac{x + C}{\cos(x)}$
6. Lösungen (durch Aufsuchen einer partikulären Lösung):
   (a) $y = 2\,x - 2 + Ce^{-x}$
   (b) $y = (x + C)\,e^{-x}$
7. Lösungen:
   (a) $y_1 = \dfrac{\sqrt{-2\,x^2 + K\,x^{(10/3)}}}{2}$, $y_2 = -\dfrac{\sqrt{-2\,x^2 + K\,x^{(10/3)}}}{2}$
   (b) $y = x\sin(x) + Cx$, $y_p = x\,\sin(x) + 2\,x$
   (c) $y = -\dfrac{5}{17}\,\cos(x) - \dfrac{20}{17}\,\sin(x) + Ce^{4\,x}$
   (d) $y = e^{\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$, $y_p = 1$
   (e) $\mathrm{i}(t) = \cos(t) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{e^{(2\,\cos(t))}}{e^2}$
8. Runge-Kutta-Verfahren: $y(0,5) = 0,14583768$