Analysis II: Übungsblatt DGL 2. Ordnung

1. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen (unter den gegebenen Anfangsbedindungen) durch Zurückführen auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

   (a) $y'' = 2\,e^y$, AB: bei $x = 0 : y = 0, y' = -2$

   (b) $y'' - 10\,y' + x^2 = 0$

   (c) $y'' = \dfrac{1 + {y'}^2}{y}$, AB: bei $x = 0 : y = 1, y' = 0$

2. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .

   (a) $y'' - 4y' + 4y = 0$

   (b) $y'' + 5y' + 10y = 0$

   (c) $y'' - 5y' + 4y = 0$

3. Die Schwingungsgleichung eines gedämpften mechanischen Systems (Feder-Masse-Schwinger) lautet: $m\ddot{s} + d\dot{s} + fs = 0$.
   Der Feder-Masse-Schwinger habe folgende Kenndaten: $m = 20\text{kg}$, $d = 40\frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $f = 40\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Die Anfangsbedingungen lauten: $s(0) = 1\text{m}$; $v(0) = \dot{s}(0) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

   (a) Handelt es sich bei dieser Schwingung um den Schwingungsfall (gedämpfte Schwingung), den Kriechfall (aperiodische Schwingung) oder den aperiodischen Grenzfall?
   Welchen Wert müsste d in den anderen beiden Fällen haben?

   (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der obigen Schwingungsgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingen. Zeichnen Sie außerdem die Lösung.

4. Lösen Sie die zugehörigen homogenen Differentialgleichungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen und geben Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an. (Lösen sich **nicht** die inhomogene Differentialgleichung.)

   (a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

   (b) $y'' + 4y' + 4y = \sin x e^{-2x}$

   (c) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\sin(2x)$

   (d) $y'' + 6y' + 13y = \cos(2x)$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

   (a) $y'' - y' - 2y = xe^x$

   (b) $y'' + y = \sin x$

   (c) $y'' + y = x^2$

   (d) $y'' + y = x^2 + \sin x$

6. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

   (a) $y'' - 3y' = 2x + 1 + e^{3x}$

   (b) Freier Fall mit Luftwiderstand (m : Masse, c : Luftwiderstandsbeiwert): $m\ddot{s} = mg - c\dot{s}^2$,
   AB: bei $t = 0 : s = 0, \dot{s} = 0$

   (c) $y'' + y' - 6y + 3 = 0$, bei AB: $x = 0 : y = 0$, $y' = 0$

Analysis II: LÖSUNGEN: Übungsblatt DGL 2. Ordnung

1. Lösungen (durch Zurückführen auf 1. Ordnung)
   (a) $y = \ln\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -2\ln(x+1)$
   (b) $y(x) = \frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{100} + \frac{x}{500} + K_1 e^{10x} + K_2$
   (c) $y = \cosh x = \cosh(-x) = \frac{1}{2}\frac{1+e^{2x}}{e^x} = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2x}}{e^{-x}}$

2. Lösungen (Homogene lineare Differentialgleichung)
   (a) $y = e^{2\,x}(C_1 + C_2\,x)$
   (b) $y = e^{-\frac{5\,x}{2}}\,(C_1\,\sin(\frac{\sqrt{15}\,x}{2}) + C_2\,\cos(\frac{\sqrt{15}\,x}{2})) = e^{-\frac{5\,x}{2}}\,C\,\sin(\frac{\sqrt{15}\,x}{2} + \varphi)$
   (c) $y = C_1\,e^{4\,x} + C_2\,e^x$

3. Lösung (Schwingungsgleichung)
   (a) Schwingungsfall, da $\Delta = -1 < 0$. Aperiodischer Grenzfall bei $d = 40\sqrt{2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 56,57\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Kriechfall bei $d > 40\sqrt{2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 56,57\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$.
   (b) $s(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t)$

4. Lösungen (Homogene Differentialgleichung und Ansatzfunktion)
   (a) Lösung homogen: $y_h = e^{-2x}(C_1 x + C_2)$,
   Ansatzfunktion: $y_p = x^2 C e^{-2x}$
   (b) Lösung homogen: s. 4a,
   Ansatzfunktion: $y_p = e^{-2x}(A\sin x + B\cos x)$
   (c) Lösung homogen: $y_h = e^{-3x}(C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x))$,
   Ansatzfunktion: $y_p = xe^{-3x}(A\sin(2x) + B\cos(2x))$
   (d) Lösung homogen: s. 4c,
   Ansatzfunktion: $y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

5. Lösung (Inhomogene lineare Differentialgleichung)
   (a) $y = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}(-1 - 2\,x)\,e^x$
   (b) $y = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x$
   (c) $y = C_1\sin x + C_2\cos x + x^2 - 2$
   (d) $y = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x + x^2 - 2$

6. Lösungen
   (a) $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}xe^{3x}$
   (b) $s = \frac{m}{c}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t\right)\right)$
   (c) $y = -\frac{3}{10}\,e^{2\,x} - \frac{1}{5}\,e^{-3\,x} + \frac{1}{2}$