Analysis II: Lösung zu Aufgaben 3 und 6: Übungsblatt DGL 2. Ordnung

3) Schwingungsgleichung

a) Zu prüfen ist der Wert von $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$

Bestimmung von δ^2, ω_o^2:

$$\begin{aligned} 2\delta = \frac{d}{m} & \quad \Longrightarrow \quad \delta = 1 \\ \omega_0^2 = \frac{f}{m} & \quad \Longrightarrow \quad \omega_0^2 = 2 \\ \Longrightarrow \Delta = 1 - 2 & \quad = \quad -1 < 0 \Longrightarrow \text{Schwingungsfall.} \end{aligned}$$

Es handelt sich um den Schwingungsfall, da $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2 < 0$.

<u>Kriechfall</u>: $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2 > 0$

$$\Longrightarrow \delta^2 > 2 \Longrightarrow \delta > \sqrt{2} \Longrightarrow \delta = \frac{d}{2m} > \sqrt{2} \Longrightarrow d > 40\sqrt{2}\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 56{,}57\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

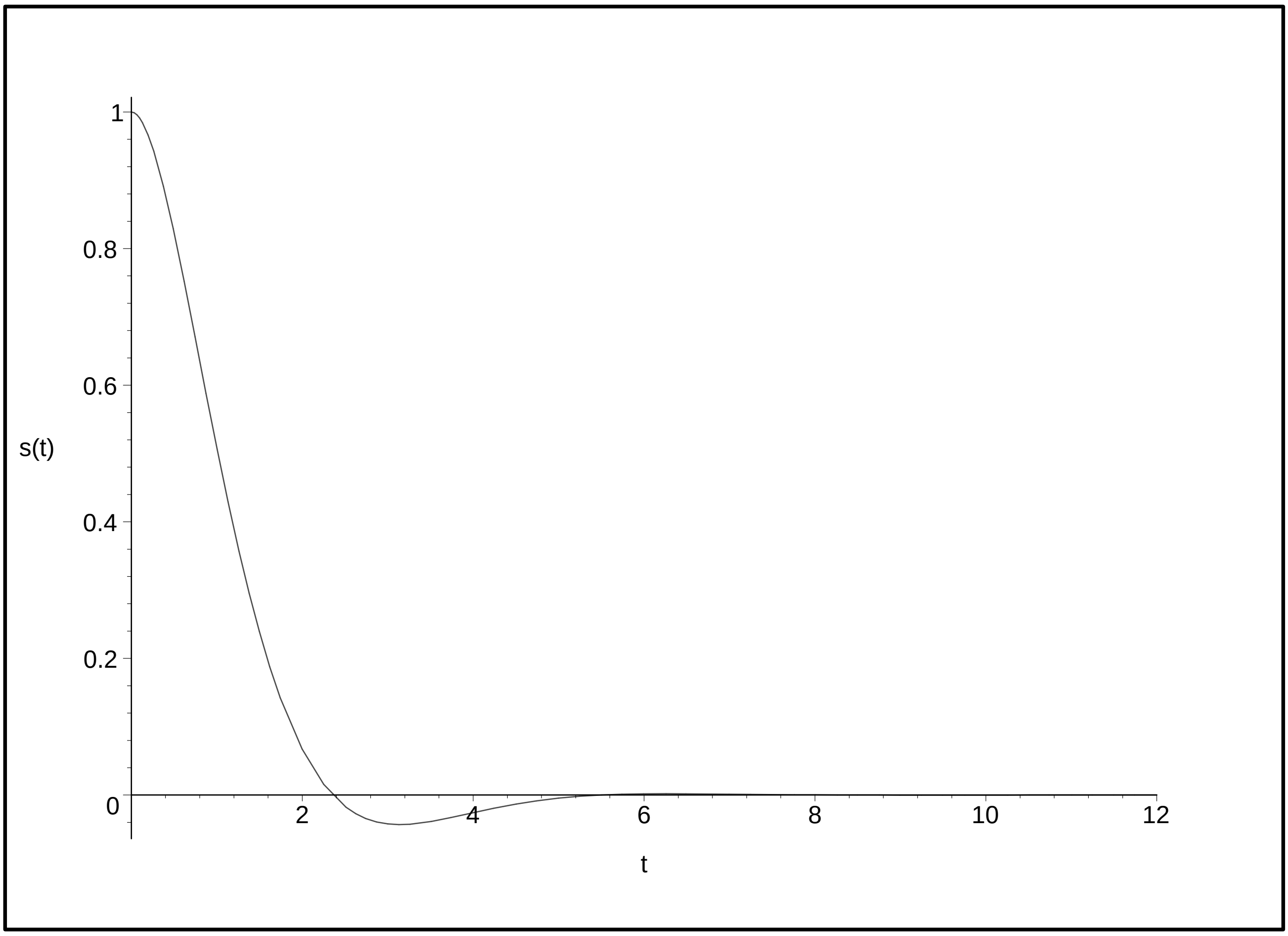
<u>Aperiodischer Grenzfall</u>: $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2 = 0$

$$\Longrightarrow \delta^2 = 2 \Longrightarrow \delta = \sqrt{2} \Longrightarrow \delta = \frac{d}{2m} = \sqrt{2} \Longrightarrow d = 40\sqrt{2}\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 56{,}57\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

b) Umgeformte Schwingungsgleichung: $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0$

1. Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung
   aus a) folgt direkt (aus der Formel für eine Schwingungsgleichung ansonsten charakteristische Gleichung aufstellen und lösen)
   $$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j$$
   damit ergibt sich als allgemeine Lösung:
   $$s(t) = e^{-t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

2. Partikuläre Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen $s(0) = 1\text{m}$; $v(0) = \dot{s}(0) = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
   <u>Ableitung</u>: $\dot{s}(t) = -e^{-t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t) + e^{-t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t)$
   $$\begin{aligned} s(0) = 1 & \quad \Longrightarrow \quad 1(0 + C_2) = 1 \Longrightarrow C_2 = 1 \\ \dot{s}(0) = 0 & \quad \Longrightarrow \quad -1(0 + C_2) + 1(C_1 + 0) = 0 \Longrightarrow -C_2 + C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 1 \end{aligned}$$
   Die partikuläre Lösung lautet also:
   $$s(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t)$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
s(t)
2
4
6
8
10
12
t

6a) $y'' - 3y' = 2x + 1 + e^{3x}$
Verfahren: Aufsuchen der partikulären Lösung

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 3y' = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda(\lambda - 3) &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad & \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$

2. Aufsuchen der partikulären Lösungen

$$y'' - 3y' = \underbrace{2x + 1}_{s_1(x)} + \underbrace{e^{3x}}_{s_2(x)}$$

Für beide Störfunktionen muss die jeweilige partikuläre Lösung ermittelt werden, die partikulären Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus der Summe der beiden.

(a) Aufsuchen der partikulären Lösung zu $s_1(x) = (2x + 1)(e^{0x})$
$\alpha = 0$ ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $\Longrightarrow$ $q = 1$:
$m = 1$ (Polynom 1. Grades).

Ansatzfunktion: $y_{p1} = x^1 B_1(x) = b_1 x^2 + b_0 x$
Ableiten: $y'_{p1} = 2b_1 x + b_0$, $y''_{p1} = 2b_1$
Einsetzen:

$$\begin{aligned} 2b_1 - 6b_1 x - 3b_0 &= 2x + 1 \\ \Longrightarrow -6b_1 x + (2b_1 - 3b_0) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow -6b_1 &= 2 \Longrightarrow b_1 = -\frac{1}{3} \\ \Longrightarrow 2b_1 - 3b_0 &= 1 \Longrightarrow b_0 = -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y_{p1} = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x$

(b) Aufsuchen der partikulären Lösung zu $s_2(x) = e^{3x}$
$\alpha = 3$ ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $\Longrightarrow$ $q = 1$:
$m = 0$ (Polynom 0. Grades = Konstante).

Ansatzfunktion: $y_{p2} = x^1 B_0(x) = b_0 x e^{3x}$
Ableiten: $y'_{p2} = b_0 e^{3x} + 3b_0 x e^{3x}$, $y''_{p2} = 3b_0 e^{3x} + 3b_0 e^{3x} + 9b_0 x e^{3x} = 6b_0 e^{3x} + 9b_0 x e^{3x}$
Einsetzen:

$$\begin{aligned} 6b_0 e^{3x} + 9b_0 x e^{3x} - 3(b_0 e^{3x} + 3b_0 x e^{3x}) &= e^{3x} \\ \Longrightarrow \quad 3b_0 e^{3x} &= e^{3x} \\ \Longrightarrow \quad 3b_0 &= 1 \\ \Longrightarrow \quad b_0 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y_{p2} = \frac{1}{3}xe^{3x}$

3. Allgemeine Lösung:

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}xe^{3x}$$

6b) $m\ddot{s} = mg - c\dot{s}^2$, AB: bei $t = 0 : s = 0, \dot{s} = 0$
Verfahren: Zurückführen auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung, Typ 3a

$$\ddot{s} = g - \frac{c}{m}\dot{s}^2 \implies \ddot{s} = f(\dot{s}) \implies \text{Typ 3a}$$

1. Substitution

$$\begin{aligned} u = \dot{s} &\implies \dot{u} = \ddot{s} \implies f(\dot{s}) = f(u) \\ \implies \dot{u} &= g - \frac{c}{m}u^2 \\ \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{c}{m}u^2 \end{aligned}$$

2. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g - \frac{c}{m}u^2}\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}t \\ \implies \frac{m}{c}\int \frac{1}{\frac{gm}{c} - u^2}\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}t \\ \implies \frac{m}{c}\sqrt{\frac{c}{gm}}\,\mathrm{artanh}(\sqrt{\frac{c}{gm}}\,u) &= t + C_1 \\ \implies \sqrt{\frac{m}{cg}}\,\mathrm{artanh}(\sqrt{\frac{c}{gm}}\,u) &= t + C_1 \\ \text{mit AB: } t = 0, \dot{s} = u = 0 &\implies C_1 = 0 \\ \implies \sqrt{\frac{m}{cg}}\,\mathrm{artanh}(\sqrt{\frac{c}{gm}}\,u) &= t \\ \implies \sqrt{\frac{c}{gm}}\,u &= \tanh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t) \\ \implies u &= \sqrt{\frac{gm}{c}}\tanh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t) \end{aligned}$$

3. Rücksubstitution: $u = \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{gm}{c}}\tanh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t)$$

4. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}s &= \sqrt{\frac{gm}{c}}\int \tanh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t)\mathrm{d}t \\ \implies s &= \sqrt{\frac{gm}{c}}\sqrt{\frac{m}{cg}}\ln\left(\cosh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t)\right) + C_2 \\ \implies s &= \frac{m}{c}\ln\left(\cosh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t)\right) + C_2 \\ \text{mit AB: } t = 0, s = 0 &\implies C_2 = 0 \end{aligned}$$

5. Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen

$$s = \frac{m}{c}\ln\left(\cosh(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t)\right)$$

6c) $y'' + y' - 6y + 3 = 0 \implies y'' + y' - 6y = -3$, bei AB: $x = 0 : y = 0,\ y' = 0$
Verfahren: Aufsuchen der partikulären Lösung

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \\ \implies \lambda_1 = 2, \qquad & \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

2. Aufsuchen der partikulären Lösung
$\alpha = 0$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung
$m = 0$

Ansatzfunktion: $y_p = B_0(x) = b_0$
Ableiten: $y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$
Einsetzen: $-6b_0 = -3 \implies b_0 = \frac{1}{2}$
Partikuläre Lösung: $y_p = \frac{1}{2}$

3. Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}$$

4. Einsetzen der Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung

$$x = 0, y = 0 : \quad C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \implies C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} \tag{1}$$

Ableitung: $y' = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$

$$x = 0, y' = 0 \implies 2C_1 - 3C_2 = 0 \implies C_1 = \frac{3}{2}C_2$$

mit (1) ergibt sich

$$\frac{3}{2}C_2 + C_2 = -\frac{1}{2} \implies C_2 = -\frac{1}{5} \implies C_1 = -\frac{3}{10}$$

5. Partikuläre Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen

$$y_{AB} = -\frac{3}{10}e^{2x} - \frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{1}{2}$$