Analysis I: Übungsblatt 2: Folgen und Funktionen

1. Wie lauten die Bildungsgesetze der folgenden Folgen?
   (a) $a_n : \frac{3}{4}; -\frac{4}{9}; \frac{5}{16}; -\frac{6}{25}; \ldots$
   (b) $b_n : 2; 1,3; 1,09; 1,027; \ldots$

2. Das in Kernreaktoren (besonders in schnellen Brütern) freiwerdende (erzeugte) Plutoniumisotop Pu_{239} hat eine Halbwertzeit von $t_{\frac{1}{2}} = 24360$ Jahren, d.h. nach $t_{\frac{1}{2}}$ ist die Hälfte der Atome zerfallen (α-Strahlung). Wie lange muß man warten, damit von einem Kilogramm Plutonium nur noch höchstens ein Gramm übrigbleibt?

3. Bestimmen Sie (falls vorhanden) die Grenzwerte
   (a) $a_n = \frac{3 \cdot n^3 + 2}{-2 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 8}$
   (b) $a_n = \frac{3 \cdot n^3 + 2}{-2 \cdot n^3 + 6 \cdot n + 8}$
   (c) $a_n = (-3 - \frac{3}{n})^n$
   (d) $a_n = 2 \cdot \sqrt[n]{3 \cdot n} - \frac{3 \cdot n^2 + 2}{n^2 + 6 \cdot n}$
   (e) $a_n = \frac{n^n}{n!}$
   (f) $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^{2n+1}$.
   Schreiben Sie dazu zunächst die Basis als Produkt (3. binomische Formel) und verwenden dann den bekannten Grenzwert für jede Nullfolge b_n: $\lim_{n \to \infty} (1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$

4. Zeigen Sie, dass die Folge
   $$a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$$
   eine Nullfolge ist. Erweitern Sie dazu den Ausdruck so, dass die Wurzeln im Zähler verschwinden.

5. Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen:
   $f(x) = x^2 e^x, \quad g(x) = x \cos x, \quad h(x) = \sin(x^2)$

6. Geben Sie den Wertebereich für $x > 0$ der folgenden Funktionen an. Untersuchen Sie außerdem das Monotonieverhalten für $x > 0$.
   $f(x) = -xe^x, \quad g(x) = (x-1) \ln x$

7. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}, x \geq 0$ und ihren Definitionsbereich.

8. Sei $f(x) = x^2 + 2$ und $g(x) = 2x - 1$. Ermitteln Sie die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$

Analysis I: LÖSUNGEN: Folgen und Funktionen

1. Wie lauten die Bildungsgesetze der folgenden Folgen?

   (a) $a_n = (-1)^n + 1\frac{n+2}{(n+3)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$

   (b) $b_n = 1 + 0,3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $242766,5$ Jahren

3. (a) $a_n \to -\infty$

   (b) $a_n \to -\frac{3}{2}$

   (c) $a_n = (-3 - \frac{3}{n})^n = \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \cdot \underbrace{3^n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{\to e}$ unbestimmt divergent

   (d) $a_n = 2 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{3n}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{3 \cdot n^2 + 2}{n^2 + 6 \cdot n}}_{\to \frac{3}{1}} \to 2 \cdot 1 - 3 = -1$

   (e) $a_n = \frac{n^n}{n!} = \underbrace{\frac{n}{1}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{n}{3}}_{\to\infty} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \to \infty$

   (f)
$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n^2})^{2n+1} = \ldots = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{-2} = 1$$

4.
$$a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \ldots < \frac{2}{\sqrt{n+1}} =: b_n$$

   b_n ist eine Nullfolge. Da $b_n > a_n > 0$ ist, ist auch a_n eine Nullfolge.

5. $f(x) = x^2 e^x$: weder gerade noch ungerade, $\quad g(x) = x \cos x$ ungerade Funktion,
   $h(x) = \sin(x^2)$ gerade Funktion

6. $f(x) : W = \mathbb{R}_0^-$, streng monoton fallend.
   $g(x) : W = \mathbb{R}_0^+$, für $0 < x \leq 1$ streng monoton fallend, für $x \geq 1$ streng monoton steigend.

7. $f^{-1}(x) = \frac{(2-x)^2}{(x-1)^2}$, $D =]1, 2]$

8. $f(g(x)) = 4x^2 - 4x + 3$, $g(f(x)) = 2x^2 + 3$