**Analysis I: Übungsblatt 3: Funktionen**

1. (a) Was ist der maximale Definitionsbereich $D \subset I\!R$, für den die Funktion

$$f\colon D \to I\!R,\ f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$$

definiert ist?

   (b) In welchem Punkt kann $f$ stetig ergänzt werden?

   (c) Wo hat die Funktion $f$ einen Pol (Unendlichkeitsstelle)?

   (d) Zeichnen Sie die Funktion.

2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden goniometrischen Gleichungen:

   (a) $\sin(2x) - \sin(x) = 0$

   (b) $\cot(x) - 2 \cdot \cos(x) = 0$

   *Hinweis*: Stellen Sie die Gleichungen 2a und 2b in der Form $a \cdot b = 0$ dar. Dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

3. Bestimmen Sie die Lösungen $x$ der folgenden Gleichungen:

   (a) $9^{x+\frac{1}{2}} = 6 \cdot 3^x - 3$

   (b) $\lg(x) + \ln(3 \cdot x) = 4$

   (c) $(\frac{3}{4})^{2x+1} = (\frac{8}{3})^{3x-2}$

4. Eine Hyperbel kann man durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreiben

   (a) Beschreibt diese implizite Darstellung eine Funktion
   $f\colon D \to I\!R,\ y = f(x)$ mit $D \subset I\!R$?

   (b) Rechnen Sie nach, dass die Parameterdarstellung

$$x = a \cdot \cosh(t),\ y = b \cdot \sinh(t)$$

   die obige Gleichung erfüllt.
   ($x = \pm a \cdot \cosh(\pm t),\ y = \pm b \cdot \sinh(\pm t)$ sind sogar die einzigen Lösungen.)

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Periodizität und Beschränkheit. Geben Sie ggf. die kleinste Periode und die Schranken an. Zeichnen Sie die Funktionen im Intervall [-10;10].

   (a) $f(x) = \frac{7}{3}\cos(\frac{3}{5}x + 4)$

   (b) $f(x) = e^{-x+\sin(\frac{1}{2}x)}$

   (c) $f(x) = 3\tan(\frac{x}{2})$

6. Gegeben sei die Funktion die Funktion $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. Zeichnen Sie die Funktion und untersuchen Sie grafisch, ob sie in $x = 0$ stetig ergänzbar ist. Beweisen Sie Ihre Ergebnisse, in dem Sie den Grenzwert (falls vorhanden) bei $x = 0$ bestimmen. (Sie können dazu die Nullfolge: $(a_n) = \frac{1}{n\pi}$ verwenden.)

## Analysis I: LÖSUNGEN: Funktionen

1. (a) Maximaler Definitionsbereich $D = I\!R \backslash \{-1, 2\}$, denn der Nenner ist $(x+1) \cdot (x-2)$.
   (b) $\frac{x^4-3x^3+3x^2-2x}{x^2-x-2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{3}{x+1} = (x-1)^2 + 2 - \frac{3}{x+1}$
   Deshalb ist $\overline{f}$: $I\!R \backslash \{-1\} \to I\!R$, $\overline{f}(x) = (x-1)^2 + 2 - \frac{3}{x+1}$ stetige Ergänzung von $f$.
   (c) Pol in $x_1 = -1$ mit $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = +\infty$
2. (a) $x = n \cdot \pi$ oder $x = 2n \cdot \pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$
   (b) $x = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ oder $x = 2n \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$ oder $x = (2n+1) \cdot \pi - \frac{\pi}{6}$, $n \in Z$
3. (a) $x = 0$
   (b) $x = 7,560$
   (c) $x = 0,476$
4. (a) Nein.
   (b)
5. (a) Periode: $p = \frac{10}{3}\pi$. Obere Schranke: $S_o = \frac{7}{3}$, untere Schranke: $S_u = -\frac{7}{3}$
   (b) Periode: keine. Obere Schranke: keine, untere Schranke: $S_u = 0$
   (c) Periode: $p = 2\pi$. Obere Schranke: keine, untere Schranke: keine
6. Die Funktion ist nicht stetig ergänzbar. Sie schwingt zu $x = 0$ hin immer stärker.