Analysis I: Übungsblatt 5, Integralrechnung

1. Lösen Sie:

$$\int \sqrt{u\sqrt[3]{u^4}}du, \quad \int (t-\frac{1}{t^2})dt, \quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

2. Wie lautet die Stammfunktion zu $f(x) = x^2 - 4$, deren Kurve durch den Punkt $P(1;0)$ geht?

3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
   Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $G(x)$. (Nicht $G(x)$ selbst bestimmen!)

$$G(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$$

4. Lösen Sie:

$$\int\limits_0^2 (\sin\varphi)t dt, \quad \int\limits_a^b c d\pi dt, \quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$

5. Lösen Sie die uneigentlichen Integrale:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

6. Lösen Sie durch Substitution:

$$\int (5\sin^4 x + 2\sin x + 5)\cos x dx, \quad \int 3x^2\sqrt{6x^3-2}dx, \quad \int\limits_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

7. Lösen Sie durch partielle Integration:

$$\int\limits_1^7 te^{t-7}dt, \quad \int \frac{\cos x}{e^{2x}}dx$$

8. Lösen Sie durch Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2+4x+3}dx$$

9. Gesucht ist die Fläche zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten der folgenden Begrenzungskurven: $y_1 = x$, $y_2 = x + \sin x$ im Intervall $[0;2\pi[$.

10. Mit Taschenrechner: Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Kurve $f(x) = \sqrt{3+e^{0,5x^3}}$ im Intervall $0,5 \leq x \leq 1,7$ mit Hilfe
    (a) der Keplerschen Fassregel.
    (b) der Simpsonschen Formel (Zerlegung: h=0,2, m=6 Streifen).

Analysis I: Lösungen Integralrechnung

1.

$$\int \sqrt{u\sqrt[3]{u^4}}du = \frac{6}{13}u^{\frac{13}{6}} + C, \quad \int (t - \frac{1}{t^2})dt = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + C, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{dx}{\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{\tan t}$$

2. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{11}{3}$

3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$G'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

4.

$$\int_0^2 (\sin\varphi)tdt = 2\sin\varphi, \quad \int_a^b cd\pi dt = cd\pi(b-a), \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{6}$$

5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = \infty, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

6.

$$\int (5\sin^4 x + 2\sin x + 5)\cos x dx = \sin^5 x + \sin^2 x + 5\sin x + C, \quad \int 3x^2\sqrt{6x^3 - 2}dx = \frac{1}{9}(6x^3 - 2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$\int_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\cos 1$$

7.

$$\int_1^7 te^{t-7}dt = 6, \quad \int \frac{\cos x}{e^{2x}}dx = \frac{\sin x - 2\cos x}{5e^{2x}} + C$$

8.

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 4x + 3}dx = \frac{x^2}{2} - 7x + 15\ln(x+3) + 6\ln(x+1)$$

9. $A = 2$

10. (a) $A = 2,948153454$
    (b) $A = 2,909061672$