

Analysis I: Übungsblatt 1: Komplexe Zahlen

1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

(a) $z_1 = 1 + 3j$, $z_2 = -2 - j$, $z_3 = 1 - 2j$, $z_4 = -1 + j$

(b) $z_5 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + j \sin(\frac{\pi}{2}))$, $z_6 = \cos(30^\circ) + j \sin(30^\circ)$, $z_7 = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + j \sin(\pi))$

(c) $z_8 = 3e^{j270^\circ}$, $z_9 = e^{j\frac{3\pi}{4}}$, $z_{10} = 3e^{j320^\circ}$

2. Geben Sie die Zahlen z_1 bis z_4 aus Aufgabe 1 jeweils in Exponentialform an.

3. Geben Sie die Zahlen z_5 bis z_{10} aus Aufgabe 1 jeweils in arithmetischer Form an.

4. Berechnen Sie:

(a) $\sqrt{-4}\sqrt{-a^2}$

(b) $\frac{1}{j^4} + \frac{1}{j^5} + \frac{1}{j^6} + \frac{1}{j^7}$

(c) $(2 - 3\sqrt{3}j)(2 + 3\sqrt{3}j)$

5. Ermitteln Sie für $z_1 = 1 + 2j$ und $z_2 = -3 + j$

$$z_3 = z_1 + z_2, z_4 = z_1 - z_2, \bar{z}_1 \text{ und } \bar{z}_2$$

grafisch.

6. Gegeben sind: $z_1 = -\frac{3}{2}j + \frac{2+j}{(1-j)^2}$ und $z_2 = \frac{7}{2} + \frac{9}{2}j$.

(a) Zeigen Sie, dass die arithmetische Form von $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$ ist und geben Sie die Exponentialform von z_1 und z_2 an.

(b) Bestimmen Sie (Lösung in arithmetischer und in Exponentialform)

i. $z_1 + z_2$

ii. $z_1 \cdot z_2$

iii. z_1^4

iv. $\sqrt{z_1}$

7. Beschreiben Sie die folgenden Punktmengen in Worten und geben und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

(a) $|z - 1| < |z - j|$

(b) $|z + 3 - 4j| > 2$

8. Lösen Sie:

(a) die Gleichung $(\cos(3\varphi) + j \sin(3\varphi)) \cdot (\cos(2\varphi) + j \sin(2\varphi)) = -j$, $\varphi \in [0, \pi]$

(b) das Gleichungssystem ($x, y \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} j \cdot x + 3 \cdot y &= j \\ x + (1 + 4j) \cdot y &= 1 - j \end{aligned}$$

Analysis: Lösungen Komplexe Zahlen

1.

2. $z_1 = \sqrt{10} e^{j71,565^\circ}$, $z_2 = \sqrt{5} e^{j206,565^\circ}$, $z_3 = \sqrt{5} e^{j296,565^\circ}$, $z_4 = \sqrt{2} e^{j135^\circ}$

3. $z_5 = 2j$, $z_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}j = 0,866 + 0,5j$, $z_7 = -\frac{1}{2}$,
 $z_8 = -3j$, $z_9 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j = -0,707 + 0,707j$, $z_{10} = 2,298 - 1,928j$

4. (a) $\sqrt{-4}\sqrt{-a^2} = -2a$

(b) $\frac{1}{j^4} + \frac{1}{j^5} + \frac{1}{j^6} + \frac{1}{j^7} = 0$

(c) $(2 - 3\sqrt{3}j)(2 + 3\sqrt{3}j) = 31$

5.

6. (a) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j225^\circ}$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{130} e^{j52,125^\circ}$

(b) i. $z_1 + z_2 = 3 + 4j = 5 e^{j53,130^\circ}$

ii. $z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{65} e^{j277,125^\circ} = 0,5 - 4j$

iii. $z_1^4 = \frac{1}{4} e^{j180^\circ} = -\frac{1}{4}$

iv. 1. Lösung: $0,841 e^{j112,5^\circ} = -0,322 + 0,777j$, 2. Lösung: $0,841 e^{j292,5^\circ} = 0,322 - 0,777j$

7. Beschreiben Sie die folgenden Punktmengen in Worten und geben und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

(a) Fläche unterhalb der Geraden $y = x$

(b) Fläche ausserhalb des Kreises mit Mittelpunkt (-3,4) mit Radius 2.

8. Lösen Sie:

(a) die Gleichung: $\varphi_1 = \frac{3}{10}\pi, \varphi_2 = \frac{7}{10}\pi$

(b) das Gleichungssystem $(x, y \in \mathbb{C})$: $x = \frac{53}{50} - \frac{21}{50}j$, $y = \frac{-7}{50} - \frac{1}{50}j$