

Analysis II: Übungsblatt Differential- und Integralrechnung für mehrere Veränderliche Blatt 3

1. Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos x + y + e^z \\ x \\ x \cdot e^z \end{pmatrix}, \quad \text{mit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie das Potential von \vec{v} . Überprüfen Sie zuerst die Integrabilitätsbedingung.

2. Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} yz^2 \\ -z^2 \cdot \sin(y) + xz^2 \\ 2z \cdot \cos(y) + 2xyz + e^z \end{pmatrix}, \quad \text{mit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie das Potential von \vec{v} . Überprüfen Sie zuerst die Integrabilitätsbedingung.

3. Gegeben sei das ebene Coulomb-Feld:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{mit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

Überprüfen Sie, ob das Coulomb-Feld ein Potential haben könnte. Falls ja, hat es eines?

4. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale durch das Vektorfeld aus Aufgabe 1.

(a) Weg:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

(b) Beliebiger Weg zwischen den Punkten $P_1(0, 0, 0)$ und $P_2(1, 2, 0)$

5. Welche Vektorfelder sind konservativ?

(a)

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} 3 + 2x \cdot \sin y \\ y^2 + x^3 \cdot e^{2y} \cdot y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(b)

$$\vec{v}_b = \begin{pmatrix} 1 + \ln(x \cdot y) \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

Analysis II: LÖSUNGEN: Differential- und Integralrechnung für mehrere Veränderliche Blatt 3

1. Integrierbarkeitsbedingung ist erfüllt.

$$\text{Potential: } F(x, y, z) = \sin(x) + xy + xe^z + C$$

2. Integrierbarkeitsbedingung ist erfüllt.

$$\text{Potential: } F(x, y, z) = \cos(y) \cdot z^2 + xyz^2 + e^z + C$$

3. Integrierbarkeitsbedingung ist erfüllt.

$$\text{Potential: } F(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

4. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale durch das Vektorfeld aus Aufgabe 1.

(a)

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \left[\sin(2t+1) + 2t^3 + t^2 + e^t + 2te^t \right]_0^2 = \sin(5) + 5e^2 + 19 - \sin(1)$$

(b) Weg (z.B.):

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \left[\sin(t) + t^2 + t \right]_0^1 = \sin(1) + 2$$

5. Welche Vektorfelder sind konservativ?

(a) Definitionsbereich ist zusammenhängend, Integrierbarkeitsbedingung ist nicht erfüllt \Rightarrow nicht konservativ.

(b) Definitionsbereich ist zusammenhängend, Integrierbarkeitsbedingung ist erfüllt \Rightarrow konservativ.