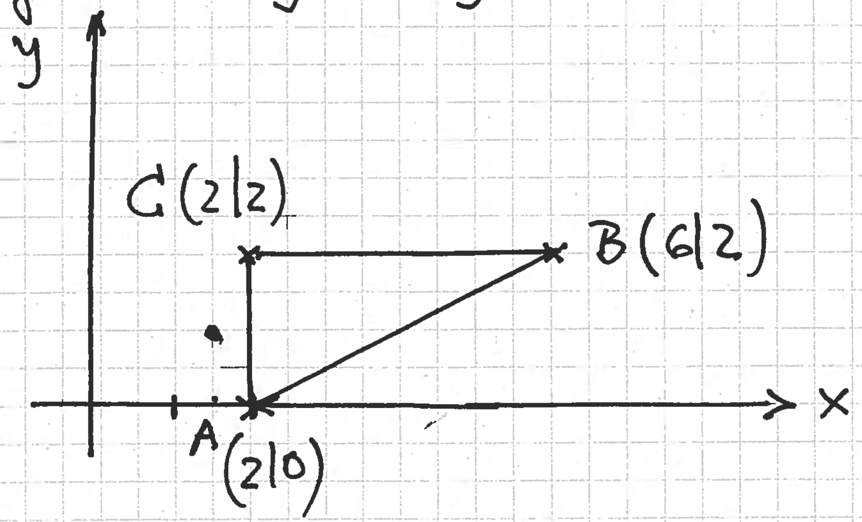
Extrema einer Fläche im Raum (mit begrenztem Definitionsbereich)

gegeben $z = y^2 - 3xy + x^2 + 5$



1) Untersuchung im Inneren des Bereichs

$$\left.\begin{array}{l} z_x = -3y_E + 2x_E \stackrel{!}{=} 0 \\ z_y = 2y_E - 3x_E \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E(0|0) \text{ liegt nicht im Definitionsbereich}$$

2) Untersuchung der Ränder

(i) Rand AC $(x=2\,;\ 0 \le y \le 2)$

$$z_{AC} = y^2 - 3\cdot 2\cdot y + 2^2 + 5 = y^2 - 6y + 9 = z_{AC}(y)$$

$$\frac{dz_{AC}}{dy} \stackrel{!}{=} 0 = 2y_1 - 6 \Rightarrow y_1 = 3 \qquad P_1(2|3)$$

P_1 liegt außerhalb von AC $\Rightarrow$
kein Extremum im Inneren, d.h. $z_{AC}(y)$ ist streng monoton $\Rightarrow$ es müssen die Eckpkte untersucht werden

$z_A = z(x=2;\ y=0) = 0^2 - 3\cdot 2\cdot 0 + 2^2 + 5$ $\qquad \boxed{z_A = 9}$

$z_C = z(x=2;\ y=2) = 2^2 - 3\cdot 2\cdot 2 + 2^2 + 5$ $\qquad \boxed{z_C = 1}$

(ii) Rand CB ($y=2$; $2 \le x \le 6$)

$$z_{CB} = 2^2 - 3 \cdot x \cdot 2 + x^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 = z_{CB}(x)$$

$$\frac{dz_{CB}}{dx} = 2x - 6 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

$P_2 = (3|2)$ liegt auf dem Rand CB
(da ist ein Extremum)

$$\frac{d^2 z_{CB}}{dx^2} = 2 > 0 \Longrightarrow$$ im Pkt P_2 liegt ein Minimum vor

$$z_{P_2} = 2^2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3^2 + 5 = \boxed{0 = z_{P_2}}$$

rel. Max. auf dem Rand CB ~~auf~~ den Eckpkten

$\boxed{z_C = 1}$ $\quad z_B = z(x=6; y=2) = 2^2 - 3 \cdot 6 \cdot 2 + 6^2 + 5 = \boxed{9 = z_B}$

(iii) Rand AB : Gerade zwischen (2|0) u. (6|2)

$y = mx + b \qquad y$

$$\left.\begin{array}{ll} (A) & 0 = m \cdot 2 + b \\ (B) & 2 = m \cdot 6 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \; ; \; b = -1$$

Gerade $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 \quad$ bzw. $\quad x = 2(y+1)$

$$z_{AB} = z_{AB}(y) = y^2 - 3\left[2(y+1)\right] \cdot y + 4(y+1)^2 + 5$$

$$z_{AB}(y) = y^2 - 6y^2 - 6y + 4y^2 + 8y + 4 + 5$$

$$z_{AB}(y) = -y^2 + 2y + 9$$

Extremum auf $\overline{AB}$: $\quad \frac{dz_{AB}(y)}{dy} = -2y_3 + 2 \overset{!}{=} 0$

$y_3 = +1 \Rightarrow x_3 = 2(1+1) = 4$

Pkt $P_3 = (4|1)$ liegt auf AB

$\Rightarrow$ Extremum im Pkt P_3

$$\frac{d^2 z_{AB}(y)}{dy^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$z_{P_3} = z(x=4; y=1) = 1^2 - 3 \cdot 4 \cdot 1 + 4^2 + 5 = \boxed{10 = z_{P_3}}$$

---

1. Im Inneren des Bereichs kein rel. Extremum

2. Auf dem Rand

$A \rightarrow z_A = 9$

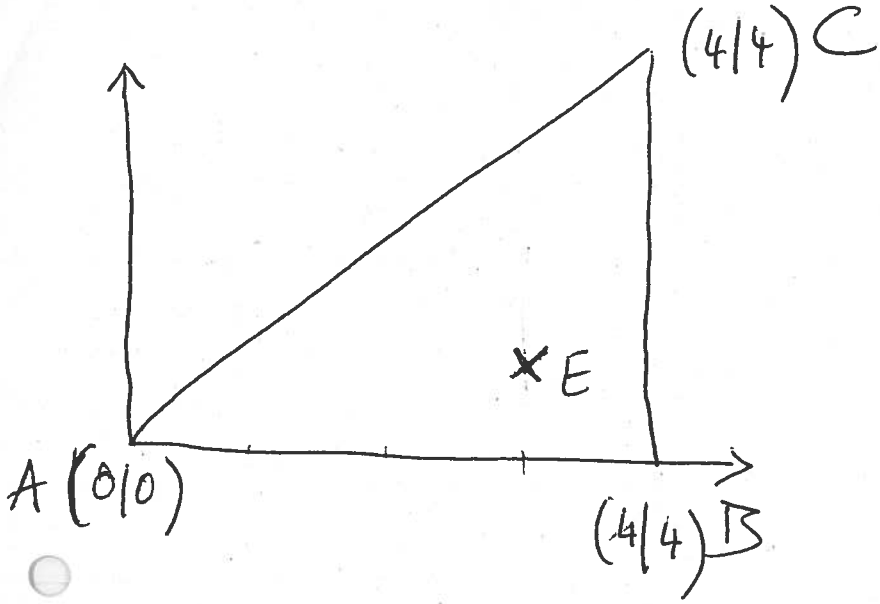
$B \rightarrow z_B = 9$

$C \rightarrow z_C = 1$

$P_2 \rightarrow z_{P_2} = 0$ in P_2 rel. Minimum

$P_3 \rightarrow z_{P_3} = 10$ in P_3 rel. Maximum

$z(x,y) = 2y^2 - 4y + x^2 - 6x + 7$ (1)



$z_x = 2x - 6 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_E = 3$ $\quad z_{xx} = 2 \quad z_{xy} = 0$

$z_y = 4y - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_E = 1$ $\quad z_{yy} = 2$

$D = 2 \cdot 2 - 0 > 0 \Rightarrow$ Extremum

$z_{xx} > 0 \Rightarrow$ Minimum

$z_E = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = 2 - 4 + 9 - 18 + 7 = -4$

$\boxed{E(3|1) \quad z_E = -4}$

Rand AB $(y = 0 \quad x \leq 0 \leq 4)$

$z_{AB} = x^2 - 6x + 7 \qquad \frac{dz_{AB}}{dx} = 2x - 6 \Rightarrow x_1 = 3$

$P_1(3|0) \xrightarrow{\text{liegt auf AB}} z_{P_1} = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = \boxed{-2 = z_{P_1}}$

$\frac{d^2 z_{AB}}{dx^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ Min

max auf R.Pkte

$\boxed{z_A = 7}$

$z_B = 4^2 - 6 \cdot 4 + 7 = -1 = z_B$

Rand BC $\quad (x=4,\ 0 \le y \le 4)$ $\quad$ ②

$$z_{BC} = z_{BC}(y) = 2y^2 - 4y + 16 - 6\cdot 4 + 7 = 2y^2 - 4y - 1$$

$$\frac{d z_{BC}(y)}{dy} = 4y - 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y_2 = 1$$

$P_2(4|1)$ liegt auf BC $\Rightarrow \dfrac{d^2 z_{BC}(y)}{dy^2} = 4 > 0 \Rightarrow$ Min.

$$z_{P_2} = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 4^2 - 6\cdot 4 + 7 = \boxed{-3 = z_{P_2}}$$

$\boxed{z_B = -1}$ $\quad z_C = z(x=4;\ y=4) = 2\cdot 4^2 - 4\cdot 4 + 4^2 - 6\cdot 4 + 7 = +1$

$\boxed{z_C = +15}$

Rand AC $\quad y = x$

$$z_{AC} = z_{AC}(x) = 2x^2 - 4x + x^2 - 6x + 7 = 3x^2 - 10x + 7$$

$\dfrac{dz_{AC}(x)}{dx} = 6x - 10 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{5}{3} = y_3}$ $\quad$ Pkt $P_3\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{5}{3}\right)$

P_3 liegt auf $\overline{AC}$

$\dfrac{d^2 z_{AC}}{dx^2} = 6 > 0 \Rightarrow$ rel. Min $\quad z_3 = 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + 7$

$$z_3 = \frac{25}{3} - \frac{50}{3} + 7 = -\frac{25}{3} + 7 = \boxed{-\frac{4}{3} = z_3}$$

$z_A = 7$ $\quad z_{P_1} = -2$

$z_B = -1$ $\quad z_{P_2} = -3$

$z_C = +15$ $\quad z_{P_3} = -1{,}33$

$z_E = -4$

rel. Min im Pkt $E(3|1)$ $z_E = -$

" Max " " $C(4|4)$ $z_C = +1$