Hochschule München
Fakultät 03

Skript zur Vorlesung

Mathematik I: Analysis

Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

15. Dezember 2014

Erstversion erstellt von Sindy Engel
erweitert von Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Begriffe

Eine Menge $\mathbb{M}$ ist eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte. Die Objekte heißen <u>Elemente</u>.

$$x \in \mathbb{M}: \ x \text{ ist Element in } \mathbb{M}$$

$$x \notin \mathbb{M}: \ x \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ Element in } \mathbb{M}$$

Leere Menge: $\mathbb{M} = \emptyset = \{\}$

Beispiel 1.1 *Mengen*

$M_1 = \{2, 4, 6\}$ *aufzählende Form*
$M_2 = \{x | (x > 1) \wedge (x < 5)\}$ *beschreibende Form*

1.1.1 Mengenrelationen

$A = B$	Gleichheit von 2 Mengen	$(A = B) \iff (a \in A \iff a \in B)$
$A \subseteq B$	A ist in B enthalten	$(A \subseteq B) \iff (a \in A \Rightarrow a \in B)$
$A \subset B$	A ist <u>echt</u> in B enthalten	$(A \subset B) \iff (A \subseteq B \wedge \exists b \in B \wedge b \notin A)$

1.1.2 Operationen

$A \cup B$	Vereinigung von A u. B	$(a \in A \cup B) \iff (a \in A \vee a \in B)$
$A \cap B$	Schnitt von A u. B	$(a \in A \cap B) \iff (a \in A \wedge a \in B)$
$A \backslash B$	Differenz von A u. B	$(a \in A \backslash B) \iff (a \in A \wedge a \notin B)$
$\bar{A}$	Komplementärmenge bzgl. einer Grundmenge M	$\forall a \in M : \big(a \in \bar{A}\big) \iff (a \notin A)$

1.2 Spezielle Mengen

Menge der *natürlichen* Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Menge der *ganzen* Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$

Menge der *rationalen* Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
x ist ein endlicher oder ein periodischer Dezimalbruch

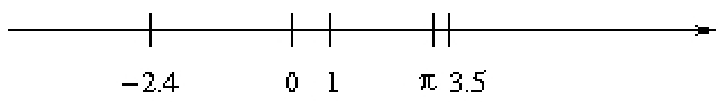
Menge der *reellen* Zahlen: $\mathbb{R} = \{x | x = \text{ein Dezimalbruch}\}$
Erweiterung von $\mathbb{Q}$ um unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche $(\pi, \mathrm{e}, \dots)$

Menge der *komplexen* Zahlen: $\mathbb{C} = \{x | x = a + bj,\ a, b \in \mathbb{R};\ j^2 = -1\}$

1.3 Menge der reellen Zahlen

1.4 Darstellung und Eigenschaften

Zahlengerade



Eigenschaften: $\forall\, a, b\ \in \mathbb{R}$

1. Mögliche Operationen

$$a + b,\ a - b,\ a \cdot b,\ \frac{a}{b}, b \neq 0$$

2. Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

3. Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

4. Distributivgesetz

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

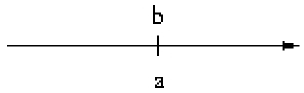
1.4.1 Anordnung der Zahlen

3 mögliche Beziehungen:

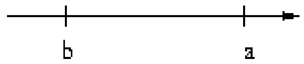
$\forall\, a, b\ \in \mathbb{R}$

$a < b$

$a = b$



$a > b$



1.4.2 Intervalle

$a, b\ \in \mathbb{R},\ a < b$

1. endliche Intervalle

$[\, a;\, b\,] = \{x|\, a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[\, a;\, b\,[\ = \{x|\, a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$]\, a;\, b\,] = \{x|\, a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$]a;\ b\,[\ = \{x|\, a < x < b\}$ offenes Intervall

2. unendliche Intervalle

$$
\begin{aligned}
[a;\ \infty[\ &= \{x|\, a \leq x < \infty\} \\
]a;\ \infty[\ &= \{x|\, a < x < \infty\} \\
]\text{-}\infty;\ b]\ &= \{x|\text{-}\infty < x \leq b\} \\
]\text{-}\infty;\ b[\ &= \{x|\text{-}\infty < x < b\} \\
]\text{-}\infty;\ 0[\ &= \mathbb{R}^- \\
]0;\ \infty[\ &= \mathbb{R}^+ \\
[\,0;\ \infty\,[\ &= \mathbb{R}_0^+ \\
]\text{-}\infty;\ \infty[\ &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

1.5 Beschränktheit von Mengen

Definition 1.1 *Beschränktheit*

Eine Zahlenmenge M heißt nach oben (unten) ***beschränkt****, wenn eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt $x \leq S$ $(x \geq S)$ ist, für alle $x \in M$*
Jedes S mit dieser Eigenschaft heißt obere (untere) ***Schranke****.*

2 Komplexe Zahlen

2.1 Grundbegriffe

Definition 2.1 *Imaginäre Einheit j*

Die Definition der Imaginären Einheit j, ergibt sich aus der Lösung der folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ \rightarrow x^2 &= -1 \\ x &= \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{j} \end{aligned}$$

Die imaginäre Einheit j ist eine Zahl, für die gilt:

$$j^2 = -1$$

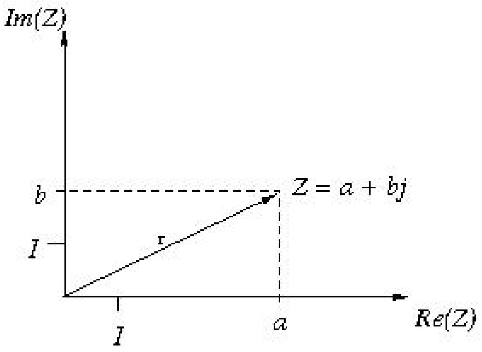
Definition 2.2 *Komplexe Zahl*

Eine komplexe Zahl z ist die Summe aus einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl bj:

$$z = a + bj$$

a heißt <u>Realteil</u>,
b heißt <u>Imaginärteil</u> von z.
Die Menge der <u>komplexen Zahlen</u> wird als $\mathbb{C}$ bezeichnet.
Es gilt $\mathbb{C} = \{Z | \overline{Z = a + bj}, j^2 = -1;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Gauß´sche Zahlenebene

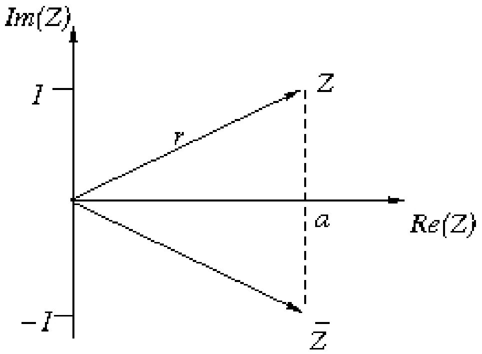


Der Betrag ergibt sich zu: $|Z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konjugiert komplexe Zahl

Definition 2.3 *Konjugiert komplexe Zahl*

Die Zahl $\bar{Z} = a - bj$ heißt konjugiert komplex zu $Z = a + bj$.
Dies entspricht in der Gauß'schen Zahlenebene einer Spiegelung an der Re(Z)-Achse.

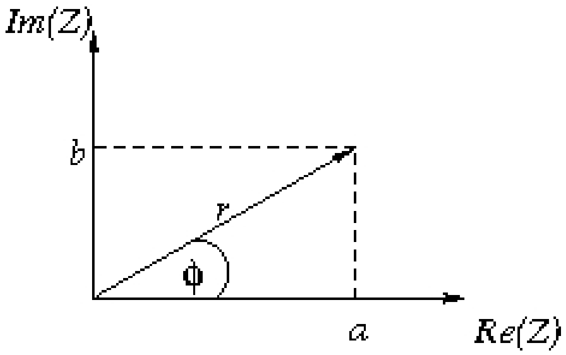


2.2 Darstellungsformen von komplexen Zahlen

2.2.1 Arithmetische Form

$$Z = \underbrace{a}_{\textit{Realteil}} + \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}} j, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2.2.2 Goniometrische/ Trigonometrische Form



Beziehungen:

$$|Z| = r$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{r}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{r}$$
$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$

$$\boxed{Z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right), \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad \text{bzw.} \quad 0° \le \varphi < 360°}$$

2.2.3 Exponentialform

Euler'sche Formel: $\mathrm{e}^{\,j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$

$$\boxed{Z = r \cdot \mathrm{e}^{\,j\varphi}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad \text{bzw.} \quad 0° \le \varphi < 360°}$$

2.3 Umrechnungen

arithmetische in goniometrische bzw. in Exponentialform

$$Z = a + bj$$
$$Z = r\ \left(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi\right)$$

bzw:

$$Z = r \cdot \mathrm{e}^{\,j\cdot\varphi}$$

mit:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exponentialform in arithmetische

$$Z = r \cdot e^{\,j\varphi}$$
$$a = r \cdot \cos\left(\varphi\right)$$
$$b = r \cdot \sin\left(\varphi\right)$$
$$Z = r \cdot \cos\left(\varphi\right) + j \cdot r \cdot \sin\left(\varphi\right)$$

2.4 Rechnen mit komplexen Zahlen

2.4.1 Addition und Subtraktion

Definition 2.4 *Summenbildung*

Die Summen und Differenzbildung erfolgt bei komplexen Zahlen, durch Addition bzw. Subtraktion der Komponenten (vgl. Vektoraddition)

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= a_1 + b_1 j \\
Z_2 &= a_2 + b_2 j \\
Z_1 + Z_2 &= (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2) \\
Z_1 - Z_2 &= (a_1 - a_2) + j\,(b_1 - b_2)
\end{aligned}
$$

Die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen ist ausschließlich in der arithmetischen Form möglich!

2.4.2 Multiplikation und Division

In arithmetischer Form

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
Z_1 \cdot Z_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) \\
&\rightarrow \text{Real- und Imaginärteil sortieren} \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 j + a_2 b_1 j - b_1 b_2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)
\end{aligned}
$$

Multiplikation konjugiert komplexer Zahlen

$$
\begin{aligned}
Z &= a + bj \\
\bar{Z} &= a - bj \\
Z \cdot \bar{Z} &= (a + bj) \cdot (a - bj) \\
&= a^2 - b^2 j^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

es entsteht eine reelle Zahl!

Division Dieser Effekt der Produkte konjugiert komplexer Zahlen, wird ausgenutzt zur Bildung des Quotienten zweier beliebiger komplexer Zahlen.

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= a_1 + b_1 j \\
Z_2 &= a_2 + b_2 j \\
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} \quad \text{Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner} \\
\Longrightarrow \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} \cdot \frac{a_2 - b_2 j}{a_2 - b_2 j} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, j}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}
$$

Goniometrische Form/ Exponentialform

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \\
Z_2 &= r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\
& \text{in Exponentialform:} \\
Z_1 \cdot Z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
& \text{analog in goniometrischer Form:} \\
Z_1 \cdot Z_2 &= r_1 \cdot r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Zwei komplexe Zahlen in goniometrischer bzw. in Exponentialform werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert, die Winkel jedoch addiert.

Division

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \\
Z_2 &= r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \\
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + j \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Zwei komplexe Zahlen in goniometrischer bzw. in Exponentialform werden dividiert, indem man die Beträge dividiert, die Winkel jedoch subtrahiert.

Potenzieren und radizieren

Potenzieren

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \\
Z_1^n &= \left(r_1 \cdot e^{j\varphi_1}\right)^n \\
Z_1^n &= r_1^n \cdot e^{n \cdot j\varphi_1} \\
Z_1^n &= r_1^n \left(\cos\left(n\varphi_1\right) + j \sin\left(n\varphi_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

Eine komplexe Zahl in goniometrischer bzw. in Exponentialform wird mit n potenziert, indem man den Betrag mit n potenziert, den Winkel jedoch mit n multipliziert.

Radizieren

$$1 = x^2 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$1 = x^4 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = j \vee x = -j$$

da:

$$
\begin{aligned}
j^4 &= \left(j^2\right)^2 = (-1)^2 = 1 \\
(-j)^4 &= \left((-j)^2\right)^2 = (1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Für den Ausdruck $\sqrt[n]{x}$ existieren n Lösungen im Abstand von $\frac{360°}{n}$, bei konstanten Beträgen. Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $Z = a + bj = r \cdot e^{j\varphi}$ gilt:

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}\right)}$$

Für

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Die Lösung für $k = 0$ wird als Hauptwert bezeichnet.

Anwendung: Überlagerung von gleichfrequenten Schwingungen

Allgemeine Sinusschwingung:

$$s\,(t) = A \cdot \sin\,(\omega t + \varphi)$$

Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Form:

$$\begin{aligned} &\underline{s}(t) = A \cdot (\cos\,(\omega t + \varphi) + j \sin\,(\omega t + \varphi)) = A \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)} \\ \Longrightarrow\ &s\,(t) = Im\,(\underline{s}(t)) \end{aligned}$$

Zwei gleichfrequente Schwingungen überlagern:

$$\begin{aligned} s_1\,(t) &= A_1 \cdot \sin\,(\omega t + \varphi_1) \\ s_2\,(t) &= A_2 \cdot \sin\,(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Gesucht wird die Summenfunktion:

$$s_\Sigma\,(t) = s_1\,(t) + s_2\,(t) = A_1 \cdot \sin\,(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin\,(\omega t + \varphi_2) = A_\Sigma \sin\,(\omega t + \varphi_\Sigma)$$

Gebildet wird zuerst die komplexe Summe, vom Ergebnis wird der Imaginärteil bestimmt. Bildung der komplexen Summe:

$$\begin{aligned} \underline{s\,(t)} &= \underline{s_1\,(t)} + \underline{s_2\,(t)} \\ &= A_1 \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_2)} \\ &= \underbrace{A_1 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1}}_{\underline{A_1}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} + \underbrace{A_2 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2}}_{\underline{A_2}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \\ &= \underbrace{\left(\underline{A_1} + \underline{A_2}\right)}_{\underline{A}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Vorgehensweise:

1. Übergang zur komplexen Form

$$\begin{aligned} \underline{s_1(t)} &= \underline{A_1} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{A_1} = A_1 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1} \\ \underline{s_2(t)} &= \underline{A_2} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{A_2} = A_2 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2} \end{aligned}$$

2. Addition der komplexen Amplituden

$$\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2}$$

3. Rücktransformation: Bildung des Imaginärteils der komplexen Sinusschwingung

3 Reelle Zahlenfolgen

3.1 Definition von Zahlenfolgen

Definition 3.1 *Zahlenfolge*

Unter einer reellen Zahlenfolge (ZF) versteht man eine geordnete Menge reeller Zahlen. Jedem $n \geq K$ (meistens $K = 0$ oder $K = 1$) $n \in \mathbb{N}$ wird in eindeutiger Weise eine reelle Zahl a_n zugeordnet.
a_n heißt n-tes Glied der ZF.

$$(a_n) = a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots$$

3.1.1 Darstellung

1. Analytische Darstellung

   Das n-te Folgeglied lässt sich direkt berechnen

   $$a_n = \frac{1}{n}$$

2. Rekursive Darstellung

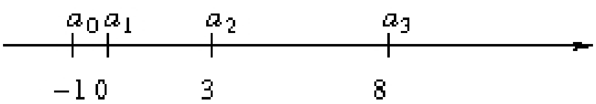
   Das n-te Folgeglied berechnet sich aus dem $(n-1)$-ten Folgeglied (ggf. $n - 2 \ldots$)

   $$a_n = a_{n-1}^2 - 1;\; a_0 = 2$$

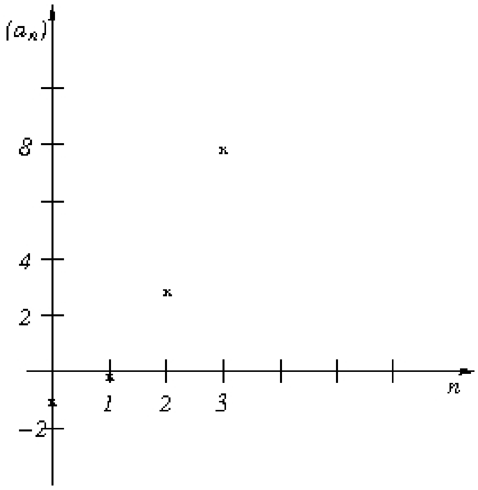
   $$\rightarrow (a_n) = 2,\, 3,\, 8,\, 63 \ldots$$

3. Graphische Darstellung - Zahlenstrahl

   Bsp. $a_n) = n^2 - 1$



4. Graphische Darstellung - Koordinatensystem



3.2 Spezielle Folgen

1. **Arithmetische Folge**
   Differenz von 2 benachbarten Folgengliedern ist gleich d

   $a_0,\, d \in \mathbb{R}$

   $a_n = a_{n-1} + d$ rekursive Darstellung
   mit $a_0 = 1,\, d = 2 \Rightarrow (a_n) = a_{n-1} + 2 = 1,\, 3,\, 5,\, 7 \ldots$
   $a_n =$ analytische Darstellung

2. **Geometrische Folge**
   Quotient von 2 benachbarten Folgengliedern ist gleich q

   $a_0,\, q \in \mathbb{R}$

   $a_n = q \cdot a_{n-1}$ rekursive Darstellung
   mit $a_0 = 1,\, q = \frac{1}{2} \Rightarrow (a_n) = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} = 1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{8}\, \ldots$
   $a_n =$ analytische Darstellung

3.3 Eigenschaften von Zahlenfolgen

3.3.1 Konvergenz

Definition 3.2 *Konvergenz*

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt

1. *konvergent gegen den Grenzwert $g \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt $|a_n - g| < \epsilon$, d.h. $a_n \in U_\epsilon(g)$*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$$

2. *Nullfolge, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

3. *divergent, wenn sie nicht konvergent ist*
4. *bestimmt divergent, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \text{-}\infty$$

5. *unbestimmt divergent, wenn Sie divergent, aber nicht bestimmt divergent ist.*

Definition 3.3 *Alternierende Zahlenfolge*

Eine ZF heißt alternierend, wenn benachbarte Folgenglieder unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

Beispiel 3.1 *Einfache alternierende ZF*

$$a_n = (\text{-}1)^n \cdot \frac{1}{n^2},\ n > 0$$

$$(a_n) = \text{-}1;\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{9};\ \frac{1}{16}\ \ldots$$

Konvergenz elementarer Folgen

1. Arithmetische Folge $a_n = a_0 + n \cdot d$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} & , \quad d > 0 \quad \text{bestimmt divergent} \\ & , \quad d = 0 \quad \text{konvergent} \\ & , \quad d < 0 \quad \text{bestimmt divergent} \end{cases}$$

2. Geometrische Folge $a_n = a_0 \cdot q^n$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} & \text{für} \quad |q| < 1 \\ & \text{für} \quad q = 1 \\ & \text{für} \quad q = \text{-}1 \\ & \text{für} \quad q > 1 \\ & \text{für} \quad q < \text{-}1 \end{cases}$$

3. Gebrochen rationale Folge $c_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ mit den Polynomen

$$p(n) = a_k\, n^k + a_{k-1}\, n^{k-1} + \cdots + a_1\, n + a_0$$

$$q(n) = b_l\, n^l + b_{l-1}\, n^{l-1} + \cdots + b_1\, n + b_0$$

vom Grad k bzw l

$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \begin{cases} & \text{für} \quad k > l, \quad \frac{a_k}{b_l} > 0 \\ & \text{für} \quad k > l, \quad \frac{a_k}{b_l} < 0 \\ & \text{für} \quad k < l \\ & \text{für} \quad k = l \end{cases}$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$

5. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \qquad , \quad a > 0$$

6. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =$$

7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} =$$

Fakultät:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$

8. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n!} = \qquad , \quad a \in \mathbb{R}$$

9. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = a; \ \lim_{n\to\infty}(b_n) = b$$

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

2. $$\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right) \cdot c = a \cdot c$$

3. $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad b \neq 0 \quad b_n \neq 0$$

Die Regeln gelten auch für bestimmt divergente Zahlenfolgen, wenn man definiert:

1. $$\infty + \infty = \infty$$

   $$\pm\infty \pm a = \pm\infty$$

2. $$c \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty; & c > 0 \\ \mp\infty; & c < 0 \\ \text{n.d.}; & c = 0 \end{cases}$$

3. $$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

   $$\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$$

   $$\text{-}\infty \cdot \pm\infty = \mp\infty$$

3.3.2 Beschränktheit und Konvergenz

Definition 3.4 *Beschränktheit*

Eine Folge (a_n) heißt beschränkt gegen eine obere bzw. untere Schranke $S \in \mathbb{R}$, falls für alle Folgenglieder gilt $a_i \leq S$ bzw. $a_i \geq S$, $i \in \mathbb{N}$.

Satz:

1. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
2. *Jede nach oben bzw. unten beschränkte monoton steigende bzw. fallende Folge ist konvergent gegen ihr Supremum bzw. Infimum.*

---

4 Funktionen einer Variablen

4.1 Funktionsbegriff

Definition 4.1 *Funktion*

Eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ *in eindeutiger Weise ein Element* $y \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ *zuordnet, heißt reelle Funktion.*

$$f: \ D \to W; y = f(x)$$

Darstellungsmöglichkeiten

1. Verbale Darstellung
2. Tabelle von Messwerten
3. Grafische Darstellung
4. Analytische Darstellung
   a) Explizite Darstellung

   $$y = f(x), \quad y = f(x) = x^2$$

   b) Implizite Darstellung

   $$F(x, y) = 0$$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Definition 4.2 *Beschränkung*

Funktionen sind per Definition beschränkt auf den Definitionsbereich $\mathbb{D}$.
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt ***beschränkt****, falls ein $c > 0$ existiert mit*

$$|f(x)| \leq c, \quad \forall x \in \mathbb{D}.$$

Ansonsten heißt die Funktion ***unbeschränkt****.*

Definition 4.3 *Monotonie*

- *monoton wachsend*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \;\; \text{mit } x_1 < x_2 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

- *streng monoton wachsend*

$$f(x_1) < f(x_2) \;\; \text{mit } x_1 < x_2 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

- *monoton fallend*

$$f(x_1) \geq f(x_2) \;\; \text{mit } x_1 < x_2 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

- *streng monoton fallend*

$$f(x_1) > f(x_2) \;\; \text{mit } x_1 < x_2 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

Definition 4.4 *Periodizität*

Eine Funktion f heißt auf $\mathbb{D}$ ***periodisch*** *mit der Periode $p \neq 0$, wenn gilt:*

$$x \in \mathbb{D} \;\Rightarrow\; x + p \in \mathbb{D}$$

und

$$f(x) = f(x + p) = f(x + k \cdot p)$$

Definition 4.5 *Symmetrie*

- *Eine Funktion f heißt auf* $\mathbb{D}$ ***gerade****, wenn gilt*

  $$x \in \mathbb{D} \;\Rightarrow\; -x \in \mathbb{D}$$

  und

  $$f(x) = f(-x)$$

  Symmetrie zur y-Achse (Achsensymmetrie)

- *Eine Funktion f heißt auf* $\mathbb{D}$ ***ungerade****, wenn gilt*

  $$x \in \mathbb{D} \;\Rightarrow\; -x \in \mathbb{D}$$

  und

  $$f(x) = -f(-x)$$

  Symmetrie zum Koordinatenursprung (Punkt oder Drehsymmetrie um den Nullpunkt)

4.3 Umkehrfunktion

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion $x \in \mathbb{D}$, d.h. sie ordnet jedem Element aus $\mathbb{D}$ genau ein Element aus $\mathbb{W}$ zu.
Gilt auch die Umkehrung d.h. zu jedem Element $y \in \mathbb{W}$ gehört genau ein $x \in \mathbb{D}$, so heißt f eineindeutig und besitzt eine Umkehrfunktion, die mit f^{-1} bezeichnet wird.

$$\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f \quad \mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f$$

Vorgehensweise zur Bildung der Umkehrfunktion:

1. Auflösen der Gleichung nach x
2. formales Vertauschen von x und y

   $$y = f^{-1}(x)$$

   wird nicht angewandt bei technischen Größen

4.4 Verkettete Funktion

Definition 4.6 *Verkettete Funktion*

Es seien $y_1 = f(x)$, $x \in D_f$ *und* $y_1 = g(x)$, $x \in D_g$*. Funktionen mit der Eigenschaft* $W_g \subseteq D_f$ *heißt* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ***verkettete Funktion****.*

4.5 Stetigkeit

Definition 4.7 *Stetigkeit und Grenzwert*

1. *Sei $f = D \to W, x_0 \in \mathbb{D}$; $g \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert, von f an der Stelle x_0, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

für jede von links bzw. rechts gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n) \in \mathbb{D}$ gilt. Schreibweise:

$$\text{links: } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$$

$$\text{rechts: } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g$$

$g = \pm\infty$ heißt uneigentlicher Grenzwert.

2. *g heißt Grenzwert von f in x_0 falls*

$$g = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Schreibweise:

$$g = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

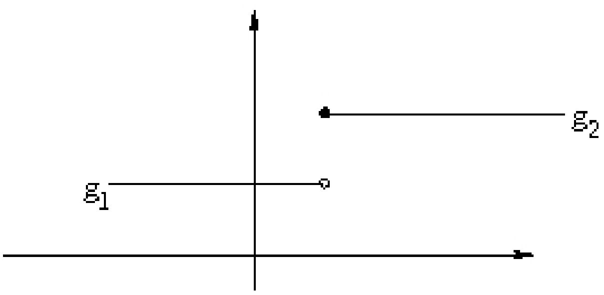
3. *f heißt stetig in x_0, falls*

$$g = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

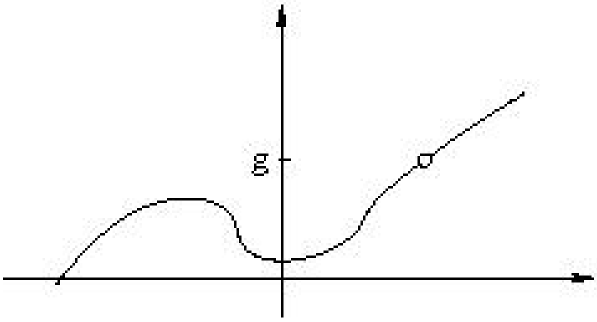
ansonsten unstetig. f heißt stetig auf $\mathbb{D}$, falls $f \forall x \in \mathbb{D}$ stetig ist. (Grafisch: Graph in einem Zug zeichenbar)

4.5.1 Arten von Unstetigkeitsstellen

Sprung $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g_1 \neq g_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$



Lücke $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$

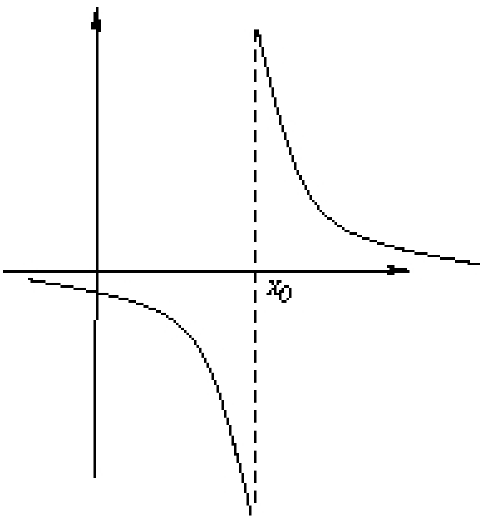


Definition 4.8 *Stetige Ergänzung*

Hat $f(x)$ in x_0 eine Lücke, so heißt die durch den Grenzwert der Lücke vervollständigte Funktion, stetig ergänzt.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ g, & x = x_0 \end{cases}$$

Polstelle $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$



4.6 Funktionsklassen

4.6.1 Ganzrationale Funktionen

Definition 4.9 *Ganzrationale Funktion*

Eine Funktion der Gestalt

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

heißt ganzrationale Funktion oder Polynom n-ten Grades.

Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom lässt sich aufspalten in:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

wobei die x_n, die (ggf. komplexen) Nullstellen darstellen.

4.6.2 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 4.10 *Gebrochenrationale Funktion*

Der Quotient zweier Polynome heißt gebrochenrationale Funktion.

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$$

Sie heißt echt gebrochen, falls $m < n$, ansonsten unecht.

Falls x_0 NS von $p_m(x)$ und $p_n(x)$ ist, so hat $f(x)$ dort eine Lücke.
Falls x_0 nur NS von $p_n(x)$, so hat $f(x)$ dort einen Pol.

4.6.3 Wurzelfunktion

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Beispiel 4.1 *Wurzelfunktion*

$$f(x) = 3x^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \sqrt[2]{x^3} \quad D = \mathbb{R}_0^+$$

4.6.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition 4.11 *Exponential- und Logarithmusfunktionen*

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0,\ a \neq 0$, dann heißt

$$f(x) = a^x \; D = \mathbb{R}$$

Exponentialfunktion mit Basis a. x heißt Exponent.
Es gilt ferner:

$$f^{-1}(x) = \log_a x,\ D = \mathbb{R}^+$$

Logarithmusfunktion von x zur Basis a.

Rechenregeln:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

5. $\log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

6. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

7. $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \Rightarrow \dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$ (Basiswechsel)

4.6.5 Trigonometrische Funktionen

1. $f(x) = \sin x, \quad D_f = \mathbb{R},\ W_f = [-1,\ 1]$

   Periode $p = 2\pi$; ungerade Funktion
   Umkehrfunktion: $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ Definitionsbereich des Sinus zum Finden der Umkehrfunktion

   $$f^{-1}(x) = \arcsin x \quad D_{f^{-1}} = [-1;\ 1],\ W_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

2. $$f(x) = \cos x, \quad D_f = \mathbb{R},\ W_f = [-1,\ 1]$$

Periode $p = 2\pi$; gerade Funktion
Umkehrfunktion: $[0;\ \pi]$ Definitionsbereich des Kosinus zum Finden der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \arccos x \quad D_{f^{-1}} = [-1;\ 1],\ W_{f^{-1}} = [0;\ \pi]$$

3. $$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D_f = \left\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{G}\right\}, W_f = \mathbb{R}$$

Periode $p = \pi$; ungerade Funktion

Umkehrfunktion auf: $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ $f^{-1} = \arctan x \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R},\ W_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$

4. $$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{G}\}, W_f = \mathbb{R}$$

Periode $p = \pi$; gerade Funktion

4.6.6 Hyperbelfunktionen

1. $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}$$

2. $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D = \mathbb{R}, \quad W = [\,1;\ \infty\,[$$

3. $$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

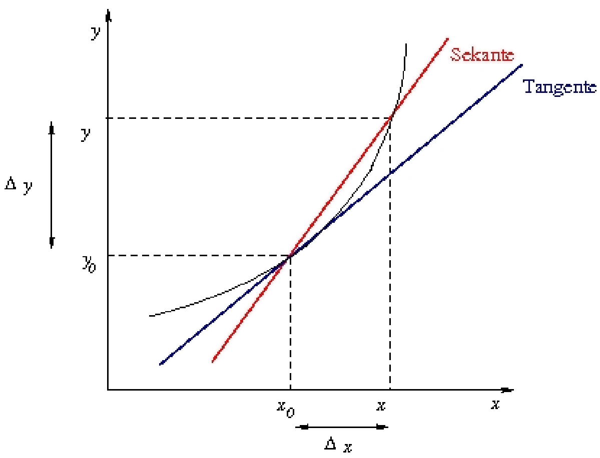
$$D = \mathbb{R}, \quad W =]-1;\ 1\,[$$

4. $$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W = \mathbb{R} \setminus [-1;\ 1]$$

5 Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

5.1 Differentialrechnung



Definition 5.1 *Differenzierbarkeit*

Eine Funktion f auf $]\,a;\,b\,[$ heißt an der Stelle x_0 ($x_0 \in]a;\,b[$) differenzierbar, falls der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
$f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0. f heißt diffenzierbar im Intervall $]\,a;\,b\,[$, falls $f \forall x \in \,]\,a;\,b\,[$ differenzierbar ist.

Definition 5.2 *Tangente und Normale*

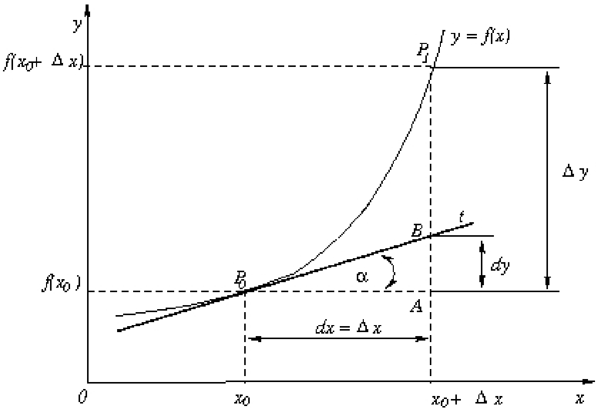
Tangente:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Normale:

$$n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5.1.1 Differential einer Funktion



Definition 5.3 *Differential*

Das Differential $dy = df = f'(x_0) \cdot dx$ einer Funktion beschreibt den Zuwachs der Ordinate auf der, an der Stelle x_0 errichteten Tangente bei einer Änderung der Abzisse von $\Delta x = dx$.

Δy Zuwachs der Funktionswerte

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$$

Für kleine $\Delta x = \mathrm{d}x \to \mathrm{d}y \approx \Delta y$

5.1.2 Differentiationsregeln

Seien $f(x)$, $g(x)$ Funktionen

- Summenregel

$$y(x) = f(x) + g(x)$$
$$y'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Produktregel

$$y(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Quotientenregel

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ y'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

- Kettenregel

$$\begin{aligned} y(x) &= f(g(x)) = f(x) \circ g(x) \\ y'(x) &= g'(x) \cdot f'(g(x)) \end{aligned}$$

  Innere Ableitung mal äußerer Ableitung

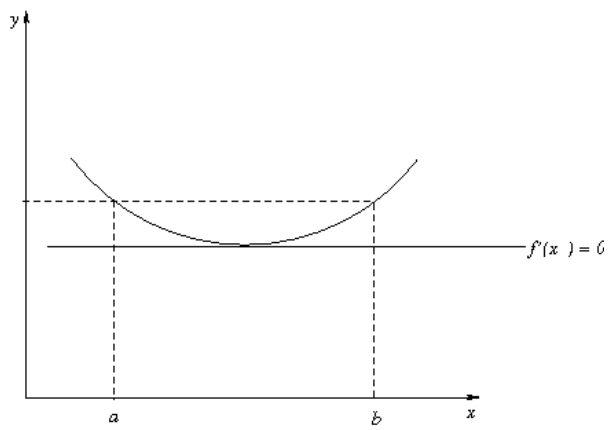
- Ableitung der Umkehrfunktion
  Sei $f : D \to W$ umkehrbar und differenzierbar. dann hat $f^{-1} : W \to D$ die Ableitung:

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5.1.3 Mittelwertsätze

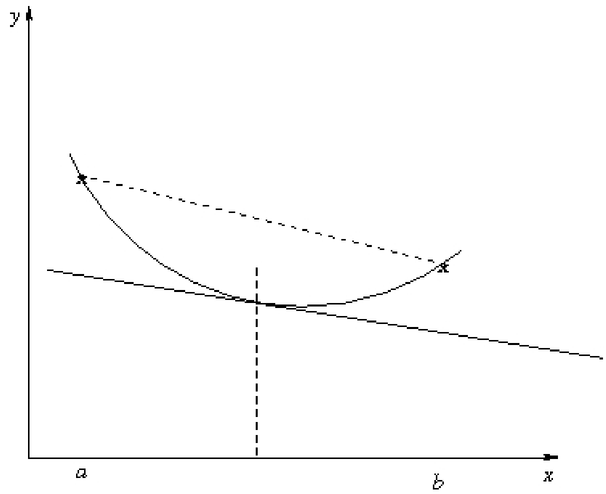
Satz: Satz von ROLLE

Eine Funktion $f(x)$ sei auf $[a,\ b]$ stetig und auf $]\,a,\ b\,[$ differenzierbar und sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert mindestens eine Stelle $x_0 \in [a,\ b]$ mit $f'(x_0) = 0$



Satz: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Eine Funktion $f(x)$ sei auf $[a,\ b]$ stetig und auf $]\,a,\ b\,[$ differenzierbar. Dann existiert mindestens eine Stelle $x_0 \in [a,\ b]$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (Steigung der Sekante)



5.1.4 Regel von l'HOSPITAL

Seien $f(x),\ g(x)$ differenzierbar auf $]\,a,\ b\,[$ und $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in\ ]\,a,\ b\,[$
Weiterhin seien

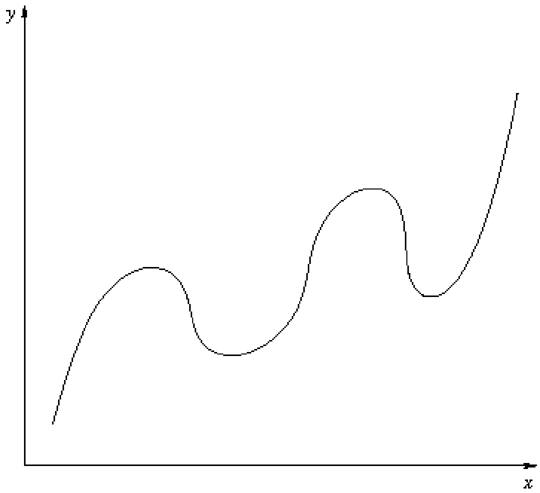
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \quad \text{oder} \quad 0$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.2 Funktionsverhalten und besondere Punkte

Monotonie:



streng monoton steigend

$$f'(x) > 0$$

monoton steigend

$$f'(x) \geq 0$$

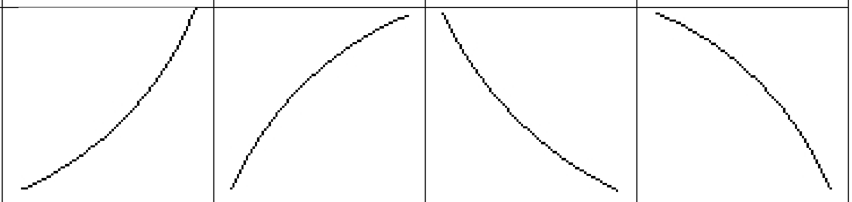
streng monoton fallend

$$f'(x) < 0$$

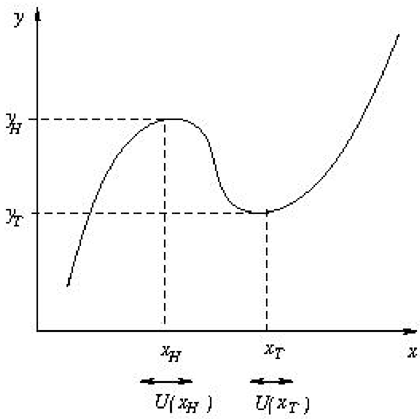
monoton fallend

$$f'(x) \leq 0$$

Krümmung:

$f'(x)$	> 0	> 0	< 0	< 0
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0	< 0
				
	streng monoton steigend		streng monoton fallend	
	Linkskurve	Rechtskurve	Linkskurve	Rechtskurve

Extremwerte:



lokales Maximum:

$$f(x_H) > f(x) \in U(x_H)$$

lokales Minimum:

$$f(x_T) < f(x) \in U(x_T)$$

5.2.1 Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremwerte und Wendepunkte

Extremwerte:

1. $f'(x_E) = 0$

2. $f'(x_E) = \cdots = f^{(n-1)}(x_E) = 0, \quad f^n(x_E) \neq 0$

   wenn n ungerade → bei x_E kein Extremwert

   $$\text{n gerade:} \begin{cases} f^{(n)}(x_E) > 0 & \Rightarrow \text{Minimum} \\ f^{(n)}(x_E) < 0 & \Rightarrow \text{Maximum} \end{cases}$$

   Häufig ist schon $f''(x_E) \neq 0$.

Wendepunkte:

Änderung des Krümmungsverhaltens in x_W

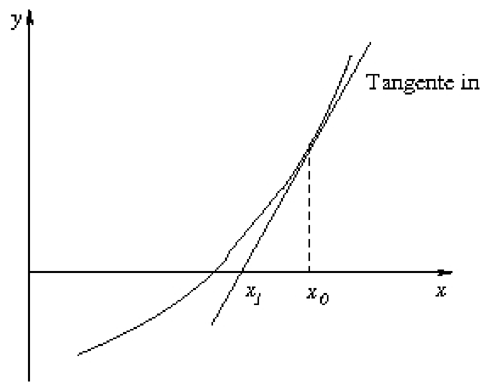
1. $f''(x_W) = 0$

2. $f''(x_W) = \cdots = f^{(n-1)}(x_W) = 0, \quad f^n(x_W) \neq 0$

   n gerade → kein Wendepunkt
   n ungerade → Wendepunkt
   Häufig ist schon $f'''(x_W) \neq 0$.

5.3 Newtoniteration zur Bestimmung von Nullstellen

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Berechnung von x_1 (Nullstelle von $t_0(x)$)

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

Allgemein:

$$x_n = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + x_{n-1}$$

Konvergenzkriterium für Startwert x_0

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1$$

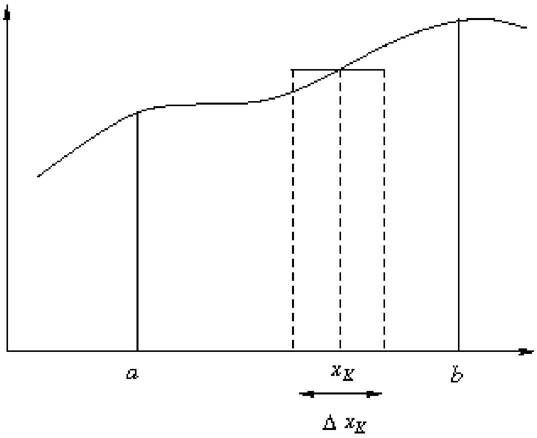
6 Integralrechnung

6.1 Bestimmtes und Unbestimmtes Integral

6.1.1 Bestimmtes Integral

Rechteck: $\Delta x_k \cdot f(x_k)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$



Eigenschaften

1. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
4. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
5. $$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
6. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,\mathrm{d}x$$
7. $$f(x) \leq g(x) \text{ auf } [a,\ b] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

6.1.2 Stammfunktion

Definition 6.1 *Stammfunktionen*

$F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Seien $F_1(x),\ F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$, dann folgt aus $F_1' = F_2' = f$, dass $F_1' - F_2' = (F_1 - F2)' = 0$. Damit gilt: $(F_1 - F2) = C$, mit $C \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich also direkt der folgende Satz.

Satz: Stammfunktion

Seien $F_1(x),\ F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$. Dann unterscheiden sich $F_1(x),\ F_2(x)$ nur um eine additive Konstante.

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

6.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** stellt den Zusammenhang zwischen der Differentiation und der Integration her.

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f stetig auf einem Intervall I. Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ sei (Integralfunktion)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Dann gilt:

1. *F ist eine Stammfunktion von f, d.h. F ist in I differenzierbar und es gilt*
   $$F'(x) = f(x).$$
2. *Für jede Stammfunktion G von f und $a, b \in I$ gilt:*
   $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

6.1.4 Unbestimmtes Integral

Definition 6.2 *Unbestimmtes Integral*

*Unter $\int f(x)\,dx$ versteht man die **Menge** aller Stammfunktionen von $f(x)$. $\int f(x)\,dx$ heißt **unbestimmtes Integral**.*

Folgerung:
Sei $F(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ wobei C alle reellen Zahlen durchläuft.

6.2 Integrationsverfahren

6.2.1 Partielle Integration

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ \Rightarrow\; u \cdot v' &= (u \cdot v)' - u'v \quad \Big| \int \\ \int_a^b u \cdot v' \,\mathrm{d}x &= \int_a^b (u \cdot v)' \,\mathrm{d}x - \int_a^b u'v \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b u \cdot v' \,\mathrm{d}x &= [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \,\mathrm{d}x \\ \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x &= u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x \end{aligned}}$$

6.2.2 Substitution

Allgemeines Verfahren zur Lösung von:$\int f(x)\mathrm{d}x$

1. **Aufstellung der Substitutionsgleichung:**

$$u = g_1(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g_1'(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g_1'(x)}$$

oder

$$x = g_2(u) \Rightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = g_2'(u)}_{\text{Ableitung nach } u} \Rightarrow \mathrm{d}x = g_2'(u) \cdot \mathrm{d}u$$

2. **Durchführung der Substitution:**
   Einsetzen in das Integral $\Rightarrow$ Integral, das nur noch von u abhängt, x muss wegfallen
   $$\int f(x)\mathrm{d}x = \int h(u)\mathrm{d}u$$
3. **Berechnung des neuen Integrals in Abhängigkeit von u:**
   $$\int h(u)\mathrm{d}u = H(u) + C$$
4. **Rücksubstition:**
   $$\int f(x)\mathrm{d}x = \int h(u)\mathrm{d}u = H(u) + C = F(x) + K$$

6.2.3 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)},$$

$N(x), Z(x)$ sind Polynome, Nennergrad>Zählergrad, falls nicht zuerst Polynomdivision .

Partialbruchzerlegung einer echt gebrochenrationalen Funktion:

1. Bestimmung der Nullstellen (Beschränkung hier auf reelle NS) des Nenners mit Vielfachheit.
2. Jeder Nullstelle wird ein Partialbruch zugeordnet:
   $$\begin{aligned} x_0 : \text{einfache Nullstelle} &\Rightarrow \frac{A}{x-x_0} \\ x_0 : \text{ Zweifache Nullstelle} &\Rightarrow \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} \\ \vdots \qquad &\vdots \qquad \vdots \\ x_0 : \text{ n-fache Nullstelle} &\Rightarrow \frac{A_1}{x-x_0} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_0)^n} \end{aligned}$$
3. Berechnung der Konstanten A bzw. A_i durch Summation der Brüche, Hauptnennerbildung und Einsetzen geeigneter Werte.

Berechnung des Integrals $\int f(x)\mathrm{d}x$:
Nach der Partialbruchzerlegung von $f(x)$, werden die Brüche einzeln integriert.
Formeln hierfür:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x-x_0}\mathrm{d}x &= A \cdot \ln|x-x_0| + C \\ \int \frac{A_i}{(x-x_0)^i}\mathrm{d}x &= \frac{A_i}{(1-i)(x-x_0)^{i-1}} \end{aligned}$$

6.2.4 Numerische Integration

Gesucht ist eine (angenäherte) Lösung von

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Dazu wird das Integrationsintervall in Teilintervalle eingeteilt.
Zerlegung des Integrationsintervalles $[a, b]$ in: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
mit der festen Schrittweite: $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$

Trapez-Regel (Verfahren 2. Ordnung)

Begrenzung durch Polynome 1. Ordnung: Geradenstücke

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right) + R}$$

Der Rest R lässt sich abschätzen durch:

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Simpson-Regel (Verfahren 4. Ordnung)

Begrenzung durch Polynome 2. Ordnung: Parabelstücke (gerade Anzahl von Teilintervallen $n = 2m$)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + f(b)\right) + R}$$

Der Rest R lässt sich abschätzen durch:

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

7 Reihen

7.1 Unendliche Reihe

7.1.1 Einführung

Zahlenfolge (geordnete Menge reeller Zahlen):

$$(a_n) = 1,\ 4,\ 9,\ 16\dots$$

Partialsumme:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 4 = 5 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 4 + 9 = 14 \\ &\vdots \\ s_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \end{aligned}$$

Definition 7.1 *Unendliche Reihe*

Die Folge (s_n) der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge (a_n) heißt unendliche Reihe.
Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \ + \dots$$

Definition 7.2 *Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe*

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge ihrer Partialsummen $(s_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert besitzt.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Konvergiert die Summe der Beträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, so heißt die Reihe absolut konvergent.*
Die Reihe heißt divergent, falls sie nicht konvergiert:
Ist $s = \infty$ *heißt die Reihe bestimmt divergent, sonst unbestimmt divergent.*

7.1.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n > 0$ ist die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

notwendig!, aber nicht hinreichend (d.h. es existieren Folgen, die die Bedingung erfüllen und trotzdem divergieren).

Quotienten- und Wurzelkriterium

Erfüllen alle Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

so ist die Reihe konvergent.
Ist $q > 1$ so ist die Reihe divergent.
Für $q = 1$ kann keine Aussage getroffen werden (Extrauntersuchung notwendig)

Rechenregeln für konvergente Reihen

1. Konstante Faktoren

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= s \\ \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n &= c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot s \end{aligned}$$

2. Summen konvergenter Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= s \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t\end{aligned}$$

3. Produkte absolut konvergenter Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= s \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \\ &\quad \text{seien absolut konvergent} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= s \cdot t = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \\ w_n &= a_n \cdot b_1 + a_n \cdot b_2 + a_n \cdot b_3 + a_n \cdot b_4 + \cdots + a_n \cdot b_k + \dots\end{aligned}$$

7.2 Potenzreihen

7.2.1 Einführung

Definition 7.3 *Potenzreihe*

Unter einer Potenzreihe versteht man eine unendliche Reihe vom Typ:

(I)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

oder

(II)

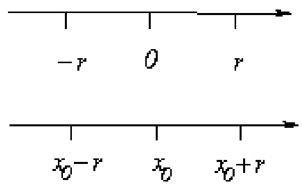
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

x_0 *heißt Entwicklungszentrum.*
Für $x_0 = 0$ *erhalten wir die Gleichung (II) in der Form (I).*

7.2.2 Konvergenz und Eigenschaften von Potenzreihen

Definition 7.4 *Konvergenzbereich*

Die Menge aller x-Werte für die eine Potenzreihe konvergiert heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.



Konvergenzverhalten:
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bzw.$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gibt es eine positive Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < r$ bzw. $|x - x_0| < r$
2. Sie divergiert für $|x| > r$ bzw. $|x - x_0| > r$
3. An den Randpunkten $|x| = r$ bzw. $|x - x_0| = r$ kann keine Aussage getroffen werden → hier müssen Extrauntersuchungen durchgeführt werden

Berechnung des Konvergenzradius

Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

kann nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$r = \lim_{r \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad r = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

Eigenschaften von Potenzreihen

1. Eine Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzbereiches absolut.
2. Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe.

3. Zwei Potenzreihen dürfen innerhalb ihres gemeinsamen Konvergenzbereiches (Durchschnitt) gliedweise addiert und subtrahiert werden. Sie dürfen auch miteinander multipliziert (Cauchy-Produkt: ausmultiplizieren) werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren mindestens im gemeisamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen.

7.3 Taylor-Reihen: Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

7.3.1 Einführung

Ziel: Funktion $f(x)$ als Potenzreihe darstellen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

oder

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a - x_0)^n$$

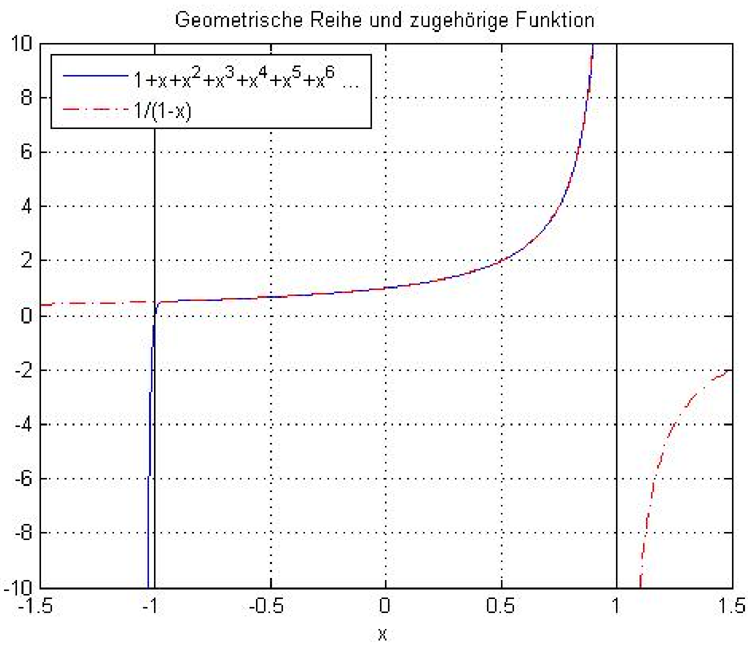
Zweck:

- Annäherung einer Funktion durch ein Polynom
- Herleitung von Näherungsformeln
- Integration durch Potenzreihenentwicklung
- Näherungsweises Lösen von transzendenten Gleichungen

Beispiel: Geometrische Reihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{konvergiert für } |x| < 1$$

$$= \frac{1}{1-x} = f(x)$$



7.3.2 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

Mac Laurinsche Reihe

Annahme:

1. Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe vom Typ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ ist möglich und eindeutig

2. $f(x)$ ist in einer Umgebung von $x = 0$ beliebig oft diefferenzierbar.
   d.h. $f(0), f'(0), f''(0) \ldots$ können berechnet werden

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_2 x + 12a_4 x^2 + \ldots \\ f'''(x) &= 6a_2 + 24a_4 x + \ldots \end{aligned}$$

für $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= a_1 \\ f''(0) &= 2a_2 & \Rightarrow a_2 &= \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!} \\ f'''(0) &= 6a_3 & \Rightarrow a_3 &= \frac{f'''(0)}{6} = \frac{f'''(0)}{3!} \\ f^{(n)}(0) &= n! \cdot a_n & \Rightarrow a_n &= \frac{f^n(0)}{n!} \end{aligned}$$

Entwicklung in eine Mac Laurinsche Reihe:
Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich $f(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad (\text{mit} 0! = 1)$$

entwickeln.

Symmetrieeigenschaften: Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so ist die Reihenentwicklung gerade (d.h. es treten nur gerade Exponenten auf: $x^0, x^2, x^4, x^6, \ldots$
Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, so ist die Reihenentwicklung auch ungerade (d.h. es treten nur ungerade Exponenten auf: $x^1, x^3, x^5, x^7, \ldots$

Taylorsche Reihe

Entwicklung in Taylorreihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

mit dem Entwicklungszentrum x_0

Für $x_0 = 0$ ergibt sich die MacLaurinsche Reihe
Konvergenzbereich: $|x - x_0| < r$

7.3.3 Anwendungen Taylor-Reihe

1. **Näherungspolynome**

   Mac Laurinsche Reihe:

   $$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{(n+1)}}_{\text{Restglied } R_n(x)} \dots$$

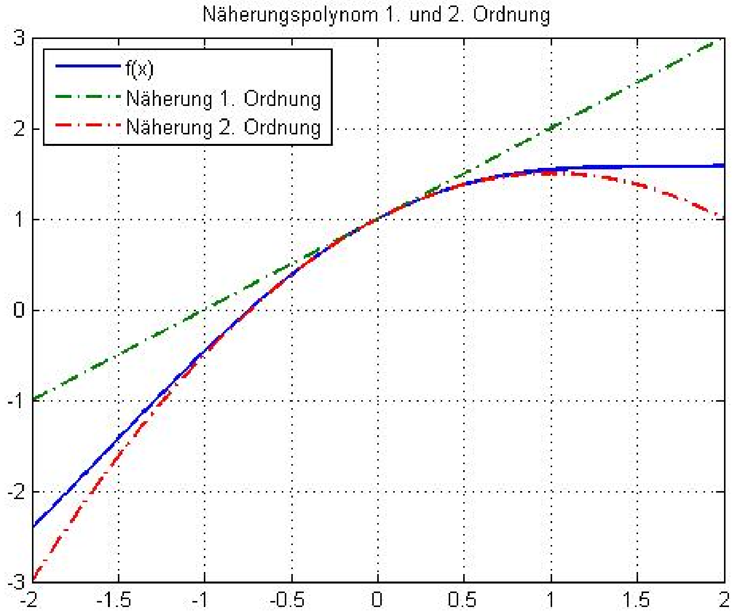
   $$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{Taylorsche Formel}$$

   $T_n(x)$: Mac Laurinsches Polynom vom Grade n
   $R_n(x)$: Restglied, bestimmt die Größe des Fehlers, $R_n(x) = 0$ für $n \to \infty$

   Der Fehler wird abgeschätzt mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange:

   $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x\theta)}{(n+1)!}x^{(n+1)} \quad 0 < \theta < 1$$

Geometrische Deutung der Näherungspolynome



Näherungspolynom erster Ordnung (Linearisierung von $f(x)$):

$$T_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

Steigung von $f(x)$ stimmt in 0 mit $T_1(x)$ überein.

Näherungspolynom zweiter Ordnung:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2$$

Krümmung von $f(x)$ stimmt in 0 mit $T_2(x)$ überein.

Weitere Näherungspolynome lassen sich entsprechend mit der allgmeinen Taylor-Entwicklung bilden.

2. **Integration nach Reihenentwicklung**
3. **Lösen von Transzendenten Gleichungen**