Hochschule München
Fakultät 03

Skript zur Vorlesung

Mathematik II: Analysis

Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

17. März 2014

Erstversion erstellt von Sindy Engel
erweitert von Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

Inhaltsverzeichnis

1 Ebene Kurven

1.1 Einleitung

1.1.1 Parameterdarstellung

$\mathcal{C} : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \mathbb{D}$

Zeichnen durch Wertetabelle für verschiedene t-Werte. $\rightarrow x, y$ zeichnen

t	$x(t)$	$y(t)$
t_1	$x(t_1)$	$y(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Bemerkung: Der Parameter t taucht in dem Graph NICHT auf.

1.1.2 Polarkoordinaten-Darstellung

$\mathcal{C} : r = r(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{D}$

Zeichnen durch Wertetabelle für verschiedene φ-Werte. $\rightarrow$ Winkel φ mit Länge $r(\varphi)$ abtragen.

φ	$r(\varphi)$
φ_1	$r(\varphi_1)$
$\vdots$	$\vdots$

1.2 Differentiation

1.2.1 Parameterdarstellung

$$x = x(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t$$
$$y = y(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} \Rightarrow \mathrm{d}y = \dot{y}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

1.2.2 Polarkoordinaten-Darstellung

$$r = r(\varphi) \Rightarrow$$

$$x = r(\varphi)\cos(\varphi) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) \quad \text{mit } \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$y = r(\varphi)\sin(\varphi) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi) \quad \text{mit } \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{\dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)}{\dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)} = \frac{r + \dot{r}\tan(\varphi)}{\dot{r} - r\tan(\varphi)}}$$

1.3 Flächen

1.3.1 Standardfläche einer explizit gegebene Funktion

$$A = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

1.3.2 Standardfläche einer Kurve in Parameterdarstellung

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |y \ \cdot \dot{x}| \, \mathrm{d}t$$

Gilt auch für geschlossene Kurven.

1.3.3 Formeln für Sektorflächen

Sektorformel für Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 \, \mathrm{d}\varphi$$

Leibnitzsche Sektorformel für Parameterdarstellung

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_{t_1}^{t_2} (y \ \cdot \dot{x} - x \cdot \dot{y}) \, \mathrm{d}t \right|$$

1.4 Bogenlänge

1.4.1 Explizit gegebene Funktion

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$

1.4.2 Parameterdarstellung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t$$

1.4.3 Polarkoordinaten-Darstellung

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

1.5 Krümmungsverhalten

1.5.1 Krümmung

1. Explizite Darstellung: $y = f(x)$

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. Parameterdarstellung: $x = x(t), y = y(t)$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Polarkoordinaten-Darstellung: $r = r(\varphi)$

$$\kappa = \frac{r^2 - r\ddot{r} + 2\dot{r}^2}{(r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.5.2 Krümmungskreisradius

$$R = \left|\frac{1}{\kappa}\right|, \quad \kappa : \text{Krümmung}$$

1.5.3 Krümmungskreismittelpunkt

1. Explizite Darstellung: $y = f(x)$

$$\begin{aligned} x_m &= x - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''} \\ y_m &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}$$

2. Parameterdarstellung: $x = x(t), y = y(t)$

$$x_m = x - \dot{y} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$y_m = y + \dot{x} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

3. Polarkoordinaten-Darstellung: $r = r(\varphi)$

$$x_m = r\cos\varphi - \frac{(r^2 + \dot{r}^2)(r\cos\varphi + \dot{r}\sin\varphi)}{r^2 - r\ddot{r} + 2\dot{r}^2}$$

$$y_m = r\sin\varphi - \frac{(r^2 + \dot{r}^2)(r\sin\varphi - \dot{r}\cos\varphi)}{r^2 - r\ddot{r} + 2\dot{r}^2}$$

2 Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

2.1 Einführung: Definition und Darstellung

2.1.1 Definition und Begriffe

Definition 2.1 *Funktion mehrerer Variablen*

Unter einer Funktion mit n unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jeden geordneten n-Tupel aus einen Definitionsbereich $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ genau einem Element z aus dem Wertebereich $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet.

$$f: \ \mathbb{D} \to \mathbb{W}; \ y = f(x_1; \, x_2; \, \ldots; \, x_n)$$

Kurzschreibweise: $y = f(x_1 \ldots x_n)$

$$\begin{aligned} &\text{für } n = 2: \quad && z = f(x; \, y) \\ &\text{für } n = 3: \quad && u = f(x; \, y; \, z) \end{aligned}$$

2.1.2 Darstellung

Allgemein

- analytische Darstellung:

  Explizit: $z = f(x; y)$

  Implizit: $F(x; y; z) = 0$ Gleichung ist nicht nach z auflösbar (z.B.: $z^5 - 3z + \sin x + z \cdot y = 0$)

- Graphische Darstellung: (für $n = 2$)
  Jedem Punkt $(x; y) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ wird der Wert $z \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet. $\Rightarrow$ Punkt im Raum, alle Punkte bilden im Allgemeinen, eine bzw. mehrere Flächen

Schnittkurvendiagramme

Wahl der Schnittebene parallel zu einer der 3 Koordinatenebenen

- parallel zur xy-Ebene. Hierbei handelt es sich um ein Höhenliniendiagramm (Landkarten)

  $\Rightarrow \; z = z_0$

  $\Rightarrow \; f(x; y) = z_0$

  Linien für verschiedene z_0 in x;y-Ebene zeichnen.

- parallel zur yz-Ebene

  $\Rightarrow \; x = x_0$

  $\Rightarrow \; z = f(x_0; y) = g(y)$

  Linien für verschiedene x_0 in y;z-Ebene zeichnen.

- parallel zur xz-Ebene

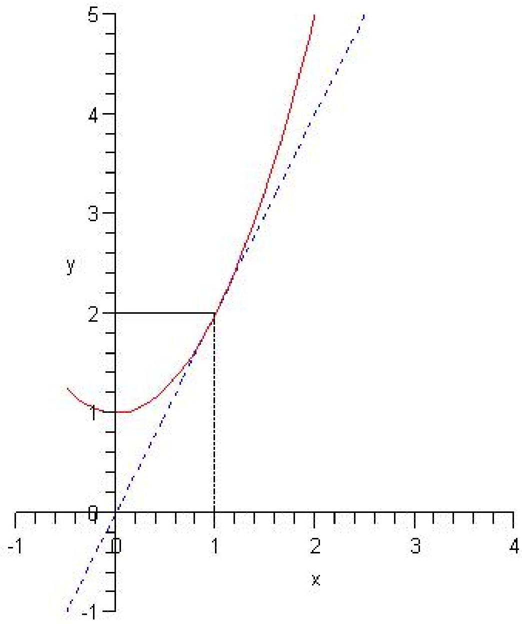
  $\Rightarrow \; y = y_0$

  $\Rightarrow \; z = f(x; y_0) = h(x)$

  Linien für verschiedene y_0 in x;z-Ebene zeichnen.

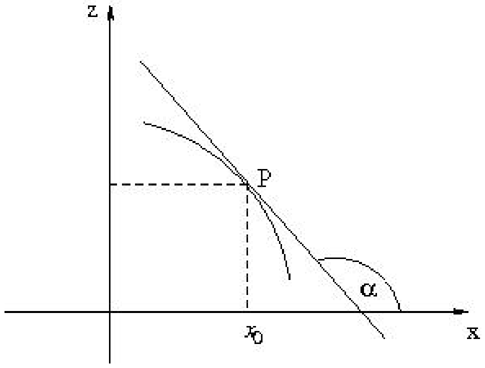
2.2 Differentialrechnung

Ableitung für Funktionen mit 1 Variablen: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$



Die Tangente schneidet die x-Achse unter dem Winkel α: $\tan\alpha = f'(x_0)$

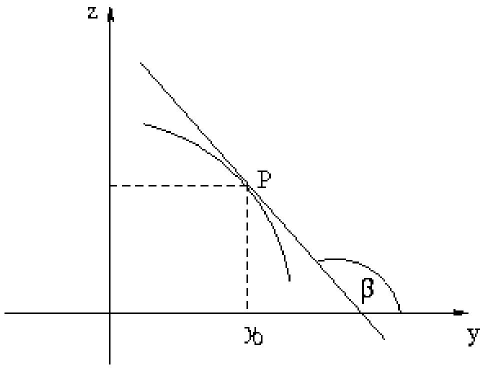
Schnitt der Fläche $z = f(x;y)$ **mit der Ebene** $y = y_0$**:** $\Rightarrow\ z = f(x, y_0) = g(x)$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m_x = \tan\alpha &= g'(x) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\ \Rightarrow \quad m_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(x;y)$ nach x ableiten, dabei y als Konstante betrachten.

Schnitt der Fläche $z = f(x;y)$ **mit der Ebene** $x = x_0$**:** $\Rightarrow\ z = f(x_0, y) = h(y))$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m_y = \tan\beta &= h'(y) \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(y_0 + \Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} \\ \Rightarrow \quad m_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

2.2.1 Partielle Ableitung

Definition 2.2 *Partielle Ableitung 1. Ordnung*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x} = f_x(x;y) = z_x = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

verschiedene Schreibweisen für „Partielle Ableitung nach x“

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} = f_y(x;y) = z_y = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

verschiedene Schreibweisen für „Partielle Ableitung nach y“

Allgemein: $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1; x_2; \ldots; x_i + \Delta x_i; \ldots; x_n) - f(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{\Delta x_i}$$

$$= f_{x_i}(x_1 \ldots x_n) = y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1 \ldots x_i)}{\partial x_i}$$

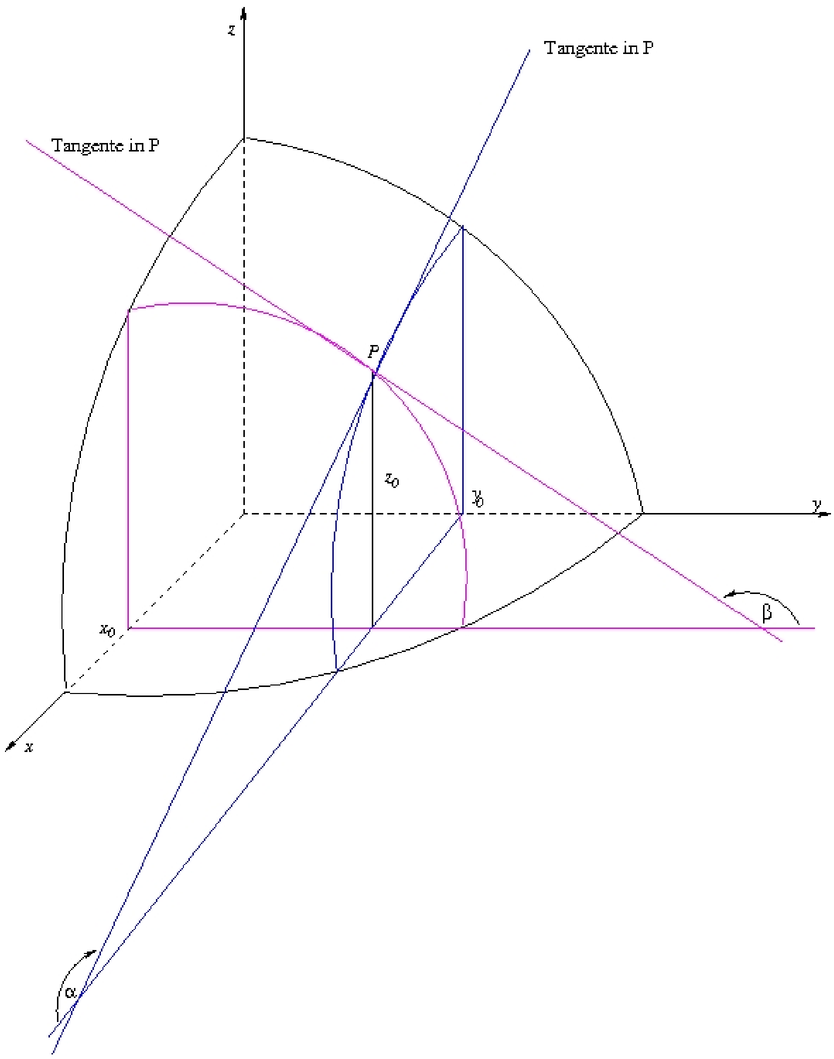


Abbildung 2.1: Partielle Ableitung einer Funktion $z = f(x;\, y)$

Definition 2.3 *Ableitungen 2. Ordnung*

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
f_{xy}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
f_{yx}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\
f_{yy}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Satz: Satz von SCHWARZ

Unter der Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen einer Funktion $y = f(x_1 \dots x_n)$ stetig sind, kann die Reihenfolge der Differentiation geändert werden!

$$f_{x_k;x_i} = f_{x_i;x_k}$$

2.2.2 Gradient, Richtungsableitung

Definition 2.4 *Gradient*

Es sei $z = f(x_{P1}, \dots, x_{Pn})$ an einer Stelle $(x_{P1}, \dots, x_{Pn}) \in \mathbb{D}$ total differenzierbar. Der Vektor aller partiellen Ableitungen dieser Funktion an dieser Stelle heißt ***Gradient*** *von f an $(x_{P1}, \dots, x_{Pn})$.*

$$\texttt{grad}\, f\big|_{x_P} = \nabla\, f\big|_{x_P} = \left.\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}\right|_{x_P} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x_P}$$

Bei Flächen im Raum gibt der Gradient die Richtung des steilsten Anstieg an.

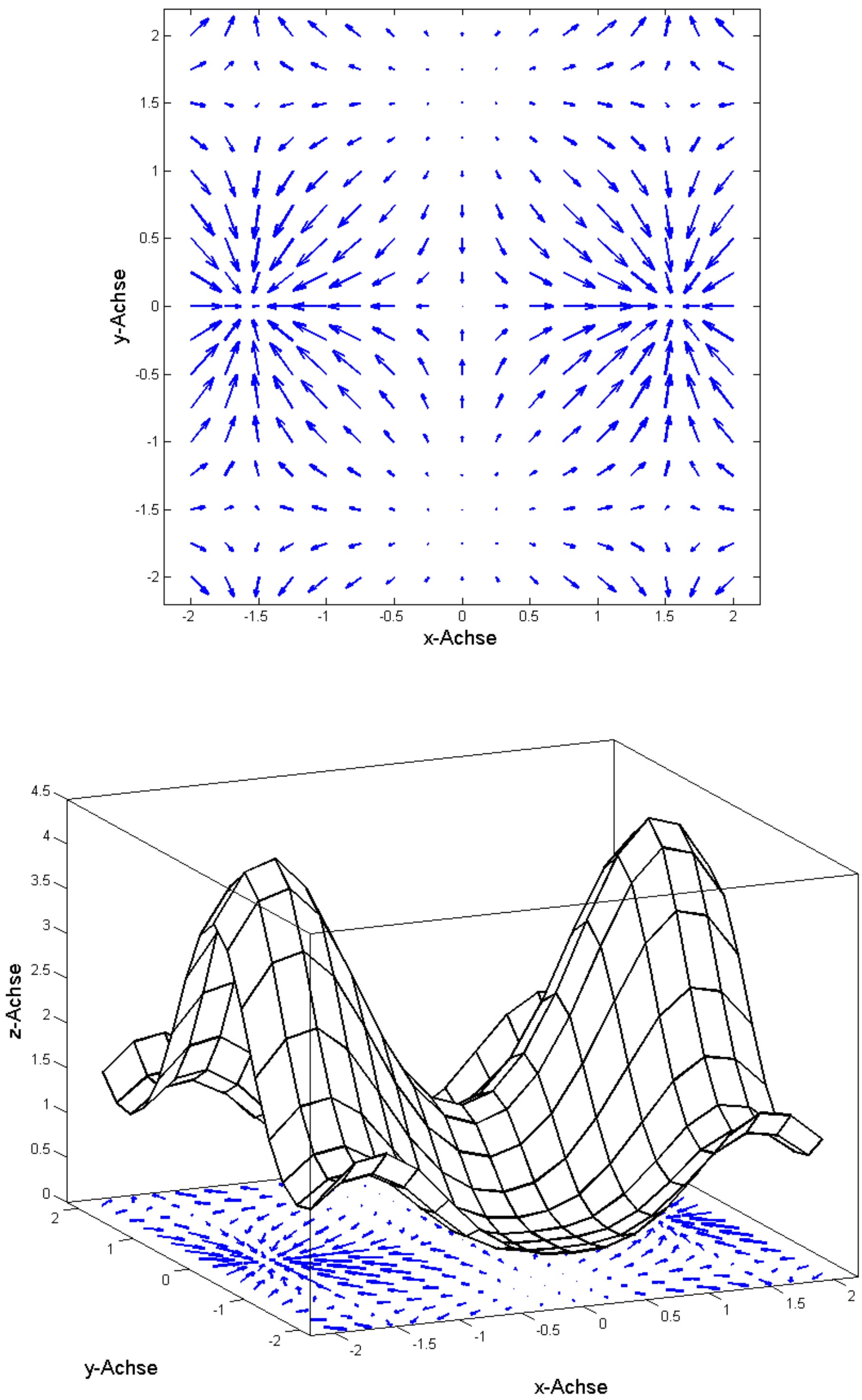


Abbildung 2.2: Gradientenfeld der Funktion $z = (\sin^2(x) + \cos^2(y))^2 + 0.5$

Häufig ist die Fragestellung wichtig: Wie steil steigt die Funktion f in einer bestimmten Richtung?
Die Richtungsableitung beschreibt die Änderungsrate einer Funktion von mehreren Veränderlichen in Richtung eines vorgegenen Vektors $\vec{v}$ in einem Punkt $x_P \in \mathbb{D}$.
Dazu wird die Hilfsfunktion $g(t) = f(x_P + t\vec{v})$ betrachtet. Für den Fall einer Fläche im Raum beschreibt g die Schnittkurve von der Ebene durch x_P in Richtung $\vec{v}$ senkrecht zur x,y-Ebene. Die Richtungsableitung ist dann $\dot{g}(0)$ (sofern existent).

Definition 2.5 *Richtungsableitung*

*Für einen Richtungsvektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\mid \vec{v} \mid = 1$ ist die **Richtungsableitung** von f in Richtung $\vec{v}$ an der Stelle $(x_{P1}, \ldots, x_{Pn})$ wie folgt definiert:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_{P1}, \ldots, x_{Pn}) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_P + t\vec{v}) - f(x_P)}{t}$$

Satz: Richtungsableitung

Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_{P1}, \ldots, x_{Pn}) = \langle\ \mathtt{grad} f(x_{P1}, \ldots, x_{Pn}), \vec{v}\ \rangle,$$

sofern der Gradient an dieser Stelle existiert. $\langle\ ,\ \rangle$ beschreibt das Skalarprodukt.

2.2.3 Totale Differenzierbarkeit und Tangentialebene

Die Existenz der partiellen Ableitungen sind ein sehr schwaches Kriterium. So können beispielweise alle partiellen Ableitungen in einem Punkt existieren obwohl die Funktion in diesem Punkt nicht stetig ist. Der Begriff der **Totalen Differenzierbarkeit** impliziert auch die Stetigkeit der Funktion.

Definition 2.6 *Totale Differenzierbarkeit*

Die Funktion f heißt (total) differenzierbar in $x_P \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, falls es einen Vektor $b = f'(x_P) \in \mathbb{R}^n$ gibt und eine Fehlerfunktion R gibt, so dass

$$f(x) \ = \ f(x_P) + \langle\ b, (x - x_P)\ \rangle + R(x)$$

und das R von höherer als erster Ordnung verschwindet, d.h.:

$$\lim_{x \longrightarrow x_P} \frac{R(x)}{\|x - x_P\|} = 0.$$

f heißt total differenzierbar, falls f für jeden Punkt aus $\mathbb{D}$ differenzierbar ist.
$\langle\ ,\ \rangle$ beschreibt das Skalarprodukt.

Anschaulich heißt dies, dass es eine Tangentialfunktion T an den Punkt x_P in einer Umgebung von x_P geben muss (f in x_P also linearisierbar ist) mit
$T(x, x_P) = f(x_P) + \langle\, b, (x - x_P)\, \rangle$.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : T(x, x_P) = f(x_P) + b(x - x_P)$ mit $b = f'(x_P)$
(T ist also eine Tangente).

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : T(x, x_P) = f(x_P) + b_1(x - x_{P1}) + b_2(x - x_{P2})$ mit $b_1 = f_{x1}|_{x_P}, b_2 = f_{x2}|_{x_P}$
(T ist also eine Tangentialebene).

Ist f total differenzierbar, so existieren auch die partiellen Ableitungen und alle Richtungsableitungen.

Gleichung der Tangentialebene:

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x; y)$ im Flächenpunkt $P = (x_0; y_0; z_0)$ lautet

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

2.2.4 Extremwertuntersuchungen

Definition 2.7 *Extremwert*

Eine Funktion besitzt an der Stelle $P_E = (x_E;\, y_E, z_E)$ ein relatives Maximum bzw. Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung U von $(x_E;\, y_E)$ stets gilt:

$$f\,(x_E;\, y_E) > f\,(x;\, y) \quad \text{bzw.} \quad f\,(x_E;\, y_E) < f\,(x;\, y)$$

mit

$$(x;\, y) \in U$$
$$(x;\, y) \neq (x_E;\, y_E)$$

$z = f(x;\, y)$ besitzt in $(x_E;\, y_E)$ einen Extremwert, falls gilt:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden.

$$\Rightarrow f_x(x_E;\, y_E) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x_E;\, y_E) = 0 \tag{2.2.1}$$

   (Notwendige aber nicht hinreichende Bedingung.)

2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} f_{xx}(x_E;\, y_E) & f_{xy}(x_E;\, y_E) \\ f_{yx}(x_E;\, y_E) & f_{yy}(x_E;\, y_E) \end{vmatrix} \\ &= f_{xx}(x_E;\, y_E) f_{yy}(x_E;\, y_E) - (f_{xy}(x_E;\, y_E))^2 > 0\end{aligned}$$

   Hinreichende Bedingung. Δ ist die Determinante der sogenannten Hessematrix (Analogon zur 2. Ableitung einer Funktion).

   $f_{xx}(x_E;\, y_E)$ bzw.$f_{yy}(x_E;\, y_E) > 0 \Rightarrow$ Min
   $f_{xx}(x_E;\, y_E)$ bzw.$f_{yy}(x_E;\, y_E) < 0 \Rightarrow$ Max

Definition 2.8 *Sattelpunkt*

$P(x_E; y_E; z_E)$ heißt Sattelpunkt, falls die notwendige Bedingung (2.2.1) erfüllt ist und $\Delta < 0$.

Falls der **globale Extremwert** auf einem vorgegebenen Bereich berechnet werden soll, müssen die Ränder des Bereiches extra betrachtet werden.

2.2.5 Totales Differential

Nutzbar z.B. für
- Fehlerfortpflanzung
- Implizite Differentiation

Problemstellung:

Welche Änderung erfährt der Funktionswert (d.h. die Höhenkoordinate z) des Flächenpunktes P bei Verschiebung von P

- auf der Fläche selbst
- auf der zugehörigen Tangentialebene?

Definition 2.9 *Totales Differential*

Unter dem totalen Differential einer Funktion von 2 Variablen versteht man den Ausdruck

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

Geometrische Deutung (s. Abb. 2.3): dz ist die Änderung der Höhenkoordinate z bei Verschiebung des Punktes P um dx, dy auf der zugehörigen Tangentialebene.
Totales Differential für n Variablen:

$$y = f(x_1 \ldots x_n) \rightarrow dy = f_{x_1}d_{x_1} + f_{x_2}d_{x_2} + \cdots + f_{x_n}d_{x_n}$$

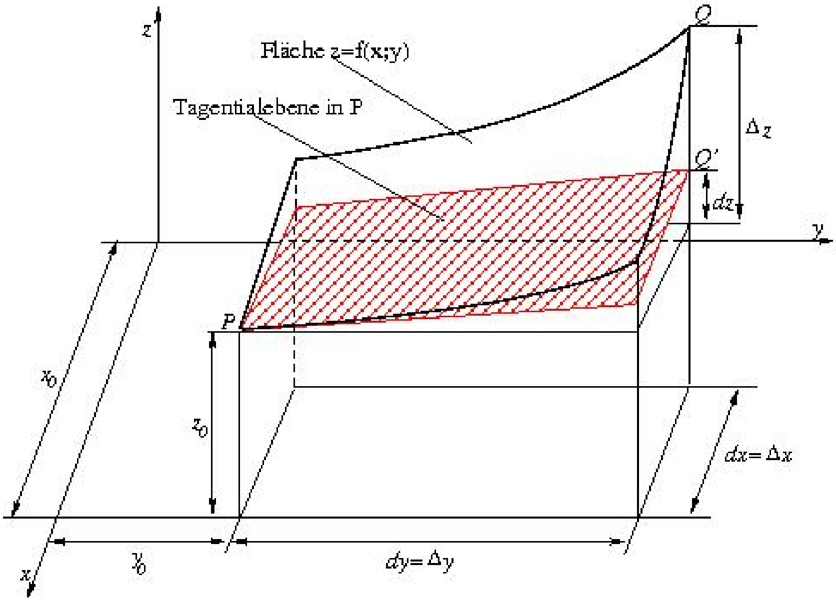


Abbildung 2.3: Totales Differential einer Funktion $z = f(x; y)$

Fehlerrechnung

Beispiel 2.1 *Zylinderdichte*

Von einem Zylinder wurde Durchmesser $D = 6,53\,cm$ und Höhe $h = 7,65\,cm$ mit einer Genauigkeit von $\pm 0,01\,cm$ und durch Wägung die Masse $m = 823,52\,g$ mit einer Genauigkeit von $\pm 0,02\,g$ gemessen.
Frage: Mit welcher Genauigkeit lässt sich daraus die Dichte des Zylinders berechnen?
Lösung: siehe Vorlesung

Die Genauigkeit folgt aus dem totalen Differential, wobei jedoch jeweils die Beträge addiert werden müssen, um den maximalen Fehler zu erhalten.

Ableitung einer Funktion einer unabhängigen Veränderlichen x in impliziter Darstellung unter Verwendung des Totalen Differentials

Implizite Darstellung: $F(x;\, y) = 0$

$$z = F(x;\, y) = 0$$

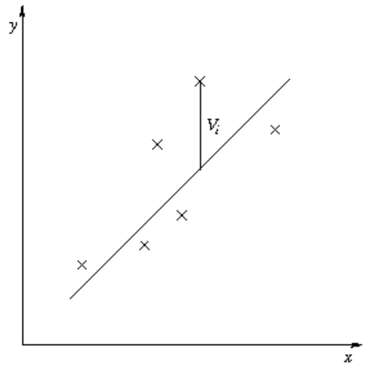
Sonderfall des totalen Differentials

$$\begin{aligned} dz &= F_x(x;\, y)dx + F_y(x;\, y)dy = 0 \\ \Rightarrow F_x(x;\, y)dx &= -F_y(x;\, y)dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x(x;\, y)}{F_y(x;\, y)}}$$

2.2.6 Ausgleichsgerade/ Parabel

(Nach dem Gauss'schen Prinzip der kleinsten Quadrate)
Gegeben: n Messpunkte $P_i(x; y)$



Gesucht: Funktion f(x), die sich den Messpunkten optimal anpasst.
Lösungsansätze:

$$f(x) = \underline{a}x + \underline{b} \ \leftarrow \ \text{Gerade}$$
$$f(x) = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} \ \leftarrow \ \text{Parabel}$$

Gesucht: Parameter a, b, c ...
Der Abstand $v_i = y_i - f(x_i)$ soll minimiert werden → Summe aller Abstandsquadrate $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ soll minimiert werden.

$$S(a, b, c\dots) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Gesuchtes Minimum ergibt sich aus:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial c} = 0,$$

Aus diesem Gleichungssystem wird die Lösung a, b, c ... ermittelt ⇒ Ausgleichsfunktion.

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y = ax + b \\
v_i &= y_i - ax_i - b \\
\sum_{i=1}^{n} v_i^2 &= S(a;\, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \\
\frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - ax_i - b) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\
\frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a \sum_{i=1}^{n} x_i + 2b \cdot n = 0
\end{aligned}
$$

a	b	RS
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = C$	$\sum_{i=1}^{n} x_i = A$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = D$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = A$	n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = B$

mit der Cramerschen Regel ergibt sich:

$$a = \frac{Z_a}{ND} \quad b = \frac{Z_b}{ND}$$

$$
\begin{aligned}
Z_a &= \det(RS;\, b) \\
Z_b &= \det(a;\, RS) \\
ND &= \det(a;\, b)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \; a = \frac{D \cdot n - A \cdot B}{n \cdot C - A \cdot A}$$

$$\Rightarrow \; b = \frac{C \cdot B - A \cdot D}{n \cdot C - A \cdot A}$$

Ausgleichsparabel

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$v_i = y_i - ax_i^2 - bx_i - c$$
$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) x_i^2\right] = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) x_i\right] = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) 1\right] = 0$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

a	b	c	RS
$E=\sum_{i=1}^{n} x_i^4$	$D=\sum_{i=1}^{n} x_i^3$	$C=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$G=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$
$D=\sum_{i=1}^{n} x_i^3$	$C=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$A=\sum_{i=1}^{n} x_i^1$	$F=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$C=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$A=\sum_{i=1}^{n} x_i$	n	$B=\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$ND = n\cdot C\cdot E + 2\cdot A\cdot D\cdot C - C^3 - n\cdot D^2 - E\cdot A^2$$
$$ZA = n\cdot C\cdot G + A\cdot B\cdot D + A\cdot C\cdot F - G\cdot A^2 - n\cdot D\cdot F - B\cdot C^2$$
$$ZB = n\cdot E\cdot F + A\cdot C\cdot G + B\cdot C\cdot D - C^2\cdot F - n\cdot D\cdot G - A\cdot B\cdot E$$
$$ZC = B\cdot C\cdot E + C\cdot D\cdot F + A\cdot D\cdot G - C^2\cdot G - A\cdot E\cdot F - B\cdot D^2$$

mit der Cramerschen Regel ergibt sich

$$a = \frac{ZA}{ND},\ b = \frac{ZB}{ND},\ c = \frac{ZC}{ND}$$

2.3 Integralrechnung

2.3.1 Doppelintegrale

Gegeben: $z = f(x,\, y)$ und Bereich $B \in \mathbb{D}$
zunächst: B ist ein Rechteck

$$B = \begin{array}{l} a_1 \le x \le a_2 \\ b_1 \le y \le b_2 \end{array}$$

Gesucht ist das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch die $(x,\, y)$-Ebene, die Ebenen

$$x = a_1,\; x = a_2,\; y = b_1,\; y = b_2$$

und der Deckelfläche: $z = f(x,\, y);\; (x,\, y) \in B$.

Zerlegung des Rechtecks:

$$\begin{aligned} &a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_{n_1} = a_2 \\ &b_1 = y_0 < y_1 \cdots < y_{n_2} = b_2 \\ &\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\ &\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \end{aligned}$$

Damit wird B in $n = n_1 \cdot n_2$ kleine Rechtecke zerlegt:

$$\Delta B_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

Ein Säulenvolumen (angenähert):

$$\begin{aligned} \Delta V_{ij} &= f(x_i;\, y_j) \Delta B_{ij} \\ &= f(x_i;\, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j. \end{aligned}$$

Die Summe von n_2 Säulen ergibt Scheiben mit der Breite Δx_i:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n_2} \Delta V_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{n_2} f(x_i;\, y_j) \cdot \Delta y_j \right) \cdot \Delta x_i.$$

Die Summe aller n_1 Scheiben ergibt das approximierte Volumen

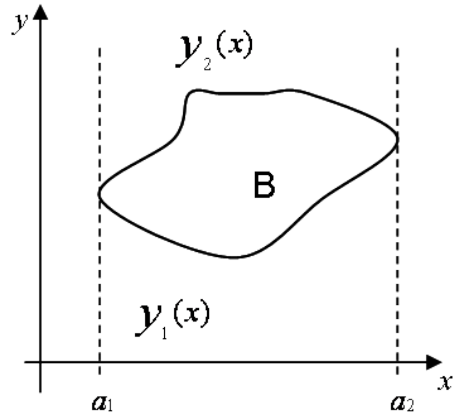
$$V = \sum_{i=1}^{n_1} V_i = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\left(\sum_{j=1}^{n_2} f(x_i;\, y_j) \cdot \Delta y_j \right) \cdot \Delta x_i \right).$$

Definition 2.10 *Doppelintegral*

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^{n_2} f(x_i;\, y_j)\cdot \Delta y_j \right) \cdot \Delta x_i \\
&= \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,\, y)dydx \\
&= \iint_B f(x,y)dB
\end{aligned}
$$

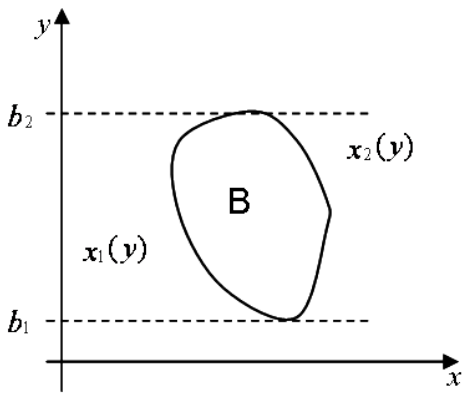
Verallgemeinerung:

B werde begrenzt von einer stetigen sich nicht schneidenden Kurve. B heißt ebener Normalbereich. B lässt sich folgendermaßen beschreiben:



$$
\begin{aligned}
B &: a_1 \le x \le a_2, \\
y_1(x) &\le y \le y_2(x)
\end{aligned}
$$

bzw.



$$
\begin{aligned}
B &: b_1 \le y \le b_2, \\
x_1(y) &\le x \le x_2(y)
\end{aligned}
$$

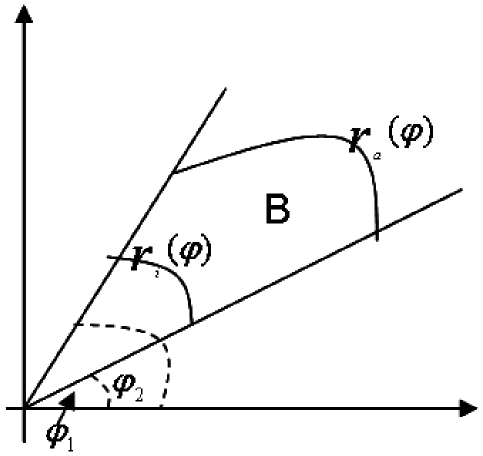
Das Integral berechnet sich wie folgt:

$$\iint\limits_B f(x,y)dB = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\, y)dy \right) dx$$

bzw.

$$\iint\limits_B f(x,y)dB = \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\, y)dx \right) dy$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten



$B : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$
$r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi)$

Berechnung des Doppelintegrals in Polarkoordinaten:
Transformationsgleichungen:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi), \quad dB = rdrd\varphi$$

$$\iint\limits_B f(x,y)dB = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int\limits_{r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r\cos(\varphi);\, r\sin(\varphi))rdr \right) d\varphi$$

2.3.2 Dreifachintegrale

Gegeben: $u = f(x,\, y,\, z)$ und Bereich $B \in \mathbb{D}$
zunächst: <u>B ist ein Quader</u>

$$B: \quad \begin{aligned} &a_1 \leq x \leq a_2 \\ &b_1 \leq y \leq b_2 \\ &c_1 \leq z \leq c_2 \end{aligned}$$

Berechnung des Dreifachintegrals

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)dB = \int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,\, y,\, z)dzdydx}$$

Verallgemeinerung: B sei ein räumlicher Normalbereich

$$B: \quad \begin{aligned} &a_1 \leq x \leq a_2 \\ &y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ &z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Berechnung des Dreifachintegrals**

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)dB = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\, y,\, z)dz \right) dy \right) dx}$$

2.4 Vektorfelder und Kurvenintegrale

Bisher wurden in diesem Kapitel Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betrachtet. Solche Funktionen werden auch **Skalarfelder** genannt, da jedem Wert in einer Fläche oder im Raum ein Skalar zugeordnet wird (Beispiel: Temperaturverteilung im Raum). Im Gegensatz dazu steht beispielsweise ein Kraftfeld, hier wird jedem Punkt in der Fläche bzw. im Raum eine Kraft (z.B. erzeugt durch einen elektrischen Dipol) also ein Vektor zugeordnet. Es handelt sich also um eine Abbildung $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Eine solche Abbildung wird als **Vektorfeld** bezeichnet.

Definition 2.11 *Vektorfeld*

Eine Funktion $\vec{v}$ von $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ heißt n-dimensionales ***Vektorfeld****:*

$$\begin{aligned} \vec{v} \quad &: \quad \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \vec{v}(x_1, \ldots, x_n) \quad &= \quad \begin{pmatrix} v_1(x_1, \ldots, x_n) \\ v_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $v_i : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$.
Sind alle v_i stetig, so heißt das Vektorfeld stetig.
Sind alle v_i (stetig) differenzierbar, so heißt das Vektorfeld (stetig) differenzierbar.

Wird von einer total differenzierbaren Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches ihr Gradient bestimmt, so entsteht ein Vektorfeld (s. Abb. 2.2).

Definition 2.12 *Gradienten- oder Potentialfeld*

Eine Funktion $\vec{v}$ von $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ heißt ***Gradienten- oder Potentialfeld****, falls eine total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ existiert mit:*

$$\vec{v} = \texttt{grad} f, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}$$

also $v_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.
Der Funktionswert $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt ***Potential*** *von $\vec{v}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Um z.B. die Arbeit in einem Kraftfeld mit Hilfe von Kurvenintegralen zu berechen, ist es wichtig zu wissen, ob das Kraftfeld ein Potential hat oder nicht. Dazu kann die folgende Integrabilitätsbedingung überprüft werden. Sie ist eine notwendige Voraussetzung.

Integrabilitätsbedingung:
Sei $\vec{v}$ von $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Die Bedingung:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

wird als Integrabilitätsbedingung bezeichnet.

Satz:

Falls der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ des Vektorfeldes $\vec{v}$ ein einfach-zusammenhängender Bereich (d.h. jeder geschlossene Weg lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen) ist und die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, so hat das Vektorfeld Potential.
In diesem Fall ist die Integrabilitätsbedingung notwendig und hinreichend.

Um die Arbeit (Arbeit = Kraft x Weg) längs eines Weges (z.B. Abbildung 2.4 in einem Kraftfeld zu berechnen, muss das Kurvenintegral eingeführt werden.. Der Weg wird als ebene oder räumliche Kurve (also n=2 oder 3) betrachtet.

Definition 2.13 *Kurvenintegral*

Sei

$$\mathcal{C} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(x_1, \ldots, x_n) \\ r_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ r_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

ein durch die Parameterdarstellung (stetig differenzierbar) gegebener Weg, der ganz in dem Definitionsbereiches $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eines stetigen Vektorfeldes $\vec{v}$. verläuft. Dann heißt

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{v} \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_a^b \langle\ \vec{v}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t)\ \rangle\, \mathrm{d}t.$$

Kurvenintegral *(oder Wegintegral) längs $\mathcal{C}$. Falls $\mathcal{C}$ ein geschlossener Weg ist, so schreibt man auch:*

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \mathrm{d}\vec{r}.$$

Dieses Integral wird Ring- oder Umlaufintegral genannt.

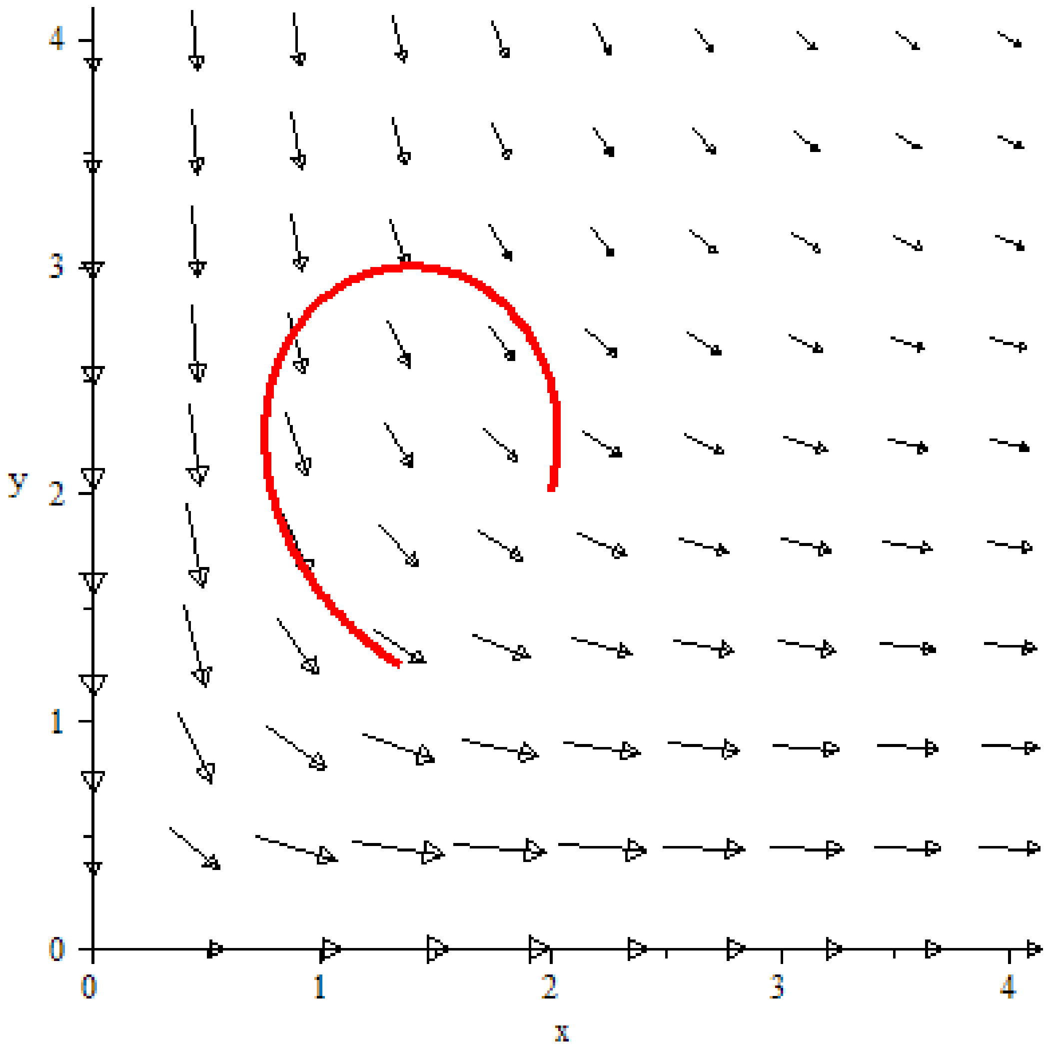


Abbildung 2.4: Kraftfeld mit Weg

Der Wert des Kurvenintegrals ist unabhängig von der Parametrisierung. Die Umlaufrichtung bestimmt das Vorzeichen.

Definition 2.14 *Konservatives Vektorfeld*

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ auf $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***konservativ****, wenn das Kurvenintegral für jeden beliebigen Weg $\mathcal{C}$ zwischen fest gewählten Punkten $A, B \in \mathbb{D}$ den gleichen Wert hat, also* ***wegunabhängig*** *ist.*

Satz: Hauptsatz zur Kurvenintegration

Sei $\vec{v}$ von $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. $\mathbb{D}$ sei offen und einfach zusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *$\vec{v}$ ist ein Gradientenfeld (bzw. Potentialfeld): $\vec{v} = \texttt{grad} f$.*
2. *Es gilt die Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$.*
3. *$\vec{v}$ ist konservativ (jedes Kurvenintegral hängt nur vom Anfangspunkt A und Endpunkt B ab, insbesondere gilt: $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{v} \mathrm{d}\vec{r} = f(B) - f(A)$).*
4. *Für jeden geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ gilt: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \mathrm{d}\vec{r} = 0$.*

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Einleitung

Definition 3.1 *Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n-ten Ordnung vorkommen, heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

---

1. Implizite Form:

$$\begin{array}{rrcll} & F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) & = & 0 & \\ \text{Bsp:} & (y'')^2 + y'' + 5xy' + x & = & 0 & \text{2. Ordnung} \end{array}$$

2. Explizite Form:

$$\begin{array}{rrcll} & y^{(n)} & = & f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) & \\ \text{Bsp:} & y'' & = & \dfrac{y}{x} & \text{2. Ordnung} \end{array}$$

Definition 3.2 *Lösung einer Differentialgleichung*

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Menge aller Funktionen, die gemeinsam mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung in ihrem Definitionsbereich erfüllen.

Satz:

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält genau n Parameter.

Definition 3.3 *Partikuläre Lösung*

Eine spezielle Lösung (aufgrund von n speziellen Bedingungen) einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt partikuläre Lösung.

Definition 3.4 *Anfangswertproblem (AWP)*

Sind zu einem Wert x_0 n Anfangsbedingungen (AB) $(y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}))$ gegeben, so spricht man von einem Anfangswertproblem (AWP).

Satz: Exixtenzsatz von Peano

Gegeben sei das AWP $y' = f(x, y)$, $(y(x_0) = y_0$.
Ist f in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ stetig und beschränkt, so geht durch jeden Punkt (x_0, y_0) mindestens eine lokale Lösung des AWPs.

Satz: Eindeutigkeit: Satz von Picard-Lindelöf

Es existiert genau eine Lösung des AWPs, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|$$

für alle x in einer Umgebung von x_0 und alle y, z in einer Umgebung von y_0.
Man sagt f genüge einer Lipschitzbedingung.
Anmerkung: Dies ist erfüllt, falls f in einer Umgebung von (x_0, y_0) partiell nach y differenzierbar ist und dort stetig ist.

3.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.2.1 Isoklinenverfahren

Jedem Punkt $P = (x, y)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ist eindeutig die Steigung $m = f(x, y)$ zugeordnet. m gibt die Steigung der Lösungskurve in P an. Der Tripel (x, y, y') lässt sich also als *Linienelement* deuten.
Die Gesamtheit aller Linienelemente ergeben ein *Richtungsfeld*.

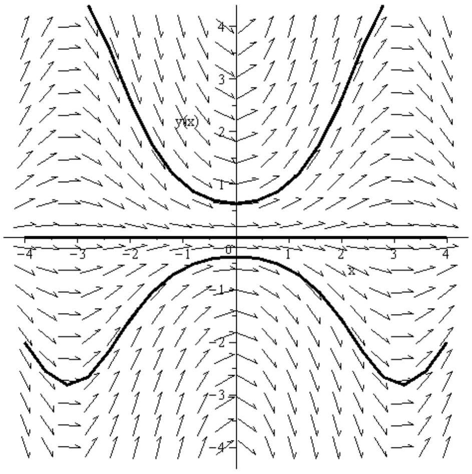


Abbildung 3.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sin x}$ mit Lösung y

Die Verbindungslinie aller Punkte, deren Linienelemente in die gleiche Richtung zeigen, heißt *Isokline*. Die Isoklinen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sind daher wie folgt definiert:

$$y' = f(x, y) = \text{constant} = c$$

.

3.2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Definition 3.5 *Differentialgleichung mit trennbaren Variablen*

Kann die Differentialgleichung 1. Ordnung auf die Form

$$y' = g(x)h(y)$$

gebracht werden, so spricht man von einer Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.

Methode 3.1 Trennung der Variablen

1. *Trennung der Variablen:* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y) \implies \dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$
2. *Integration auf beiden Seiten:* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x$
3. *Berechnung der Integrale liefert Lösung der Differentialgleichung.*

3.2.3 Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen

Methode 3.2 Substitution für Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

1. *Substitution:* $u = \frac{y}{x}$
   $\implies y = xu \implies y' = u + xu'$

$$\implies f(u) = u + xu' \quad \text{oder} \quad u' = \frac{f(u) - u}{x} \tag{3.2.1}$$

2. *Lösen der Differentialgleichung (3.2.1) durch Trennung der Variablen.*
3. *Rücksubstitution und auflösen nach* y*.*

Methode 3.3 Substitution für Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

1. *Substitution:* $u = ax + by + c$
   $\Longrightarrow u' = a + by'$
   $$\Longrightarrow u' = a + bf(u) \tag{3.2.2}$$
2. *Lösen der Differentialgleichung (3.2.2) durch Trennung der Variablen.*
3. *Rücksubstitution und auflösen nach y.*

3.2.4 Lineare Differentialgleichungen

Definition 3.6 *Lineare Differentialgleichung*

Eine Differentialgleichung heißt **linear**, *wenn sie in y und allen ihren Ableitungen linear ist.*

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} g_1(x)y' + g_0(x)y &= S(x), \quad g_1(x) \neq 0 \\ \Longrightarrow y' + \frac{g_0(x)}{g_1(x)}y &= \frac{S(x)}{g_1(x)} \end{aligned}$$

Normalform einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + g(x)y = s(x) \tag{3.2.3}$$

mit $s(x) = 0$ erhält man die
Normalform einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + g(x)y = 0 \tag{3.2.4}$$

Lösung der homogenen Gleichung

Die homogene Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen.

Methode 3.4 Spezialfall der Trennung der Variablen

Allg:

$$\begin{aligned}
y' + g(x)y &= 0 \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -g(x)y \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -g(x)dx \\
\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int g(x)dx \\
\Longrightarrow \ln|y| - \ln|K| &= -\int g(x)dx \\
\Longrightarrow \ln\left|\frac{y}{K}\right| &= -\int g(x)dx
\end{aligned}$$

$$y = Ke^{-\int g(x)dx}, \quad K \in I\!R \tag{3.2.5}$$

Sonderfall: Differentialgleichung (3.2.4) mit konstantem Koeffizienten ($g(x) = a$)

$$y' + ay = 0 \implies y = Ke^{-\int a dx} = Ke^{-ax}, \quad K \in I\!R \tag{3.2.6}$$

Lösung der inhomogenen Gleichung

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich durch folgende Verfahren ermitteln.

- Variation der Konstanten
- Aufsuchen einer partikulären Lösung

Die **Variation der Konstanten** ist immer anwendbar.

Methode 3.5 Variation der Konstanten

1. *Bestimmung einer Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h' + g(x)y = 0$ durch Trennung der Variablen.*

$$\Longrightarrow y_h = Ke^{-\int g(x)\mathrm{d}x}$$

2. *Variation der Konstanten*

   a) *Ersetzen der Konstanten K durch eine Funktion $K(x)$.*

$$\Longrightarrow y = K(x)e^{-\int g(x)\mathrm{d}x} \tag{3.2.7}$$

   b) *y ableiten und y, y' in die inhomogene Differentialgleichung (3.2.3) einsetzen.*

   c) *Lösung der Differentialgleichung für $K(x)$ durch direkte Integration.*

   d) *Einsetzen von $K(x)$ in den Lösungsansatz (3.2.7).*

Das **Aufsuchen einer partikulären Lösung** beruht auf dem folgenden Satz.

Satz: Lösung der inhomogenen Gleichung

Die Lösung der Differentialgleichung (3.2.3) ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung y_h und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung y_p:

$$y = y_h + y_p$$

Methode 3.6 Aufsuchen einer partikulären Lösung für inhomogene lineare Differentialgleichungen

1. *Bestimmung einer Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h' + g(x)y = 0$ durch Trennung der Variablen.*
2. *Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.2.3) durch einen geeigneten Lösungsansatz der einen oder mehrere Parameter enthält.*
3. *Allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.2.3): $y = y_h + y_p$.*

Sonderfall: Differentialgleichung (3.2.3) mit konstantem Koeffizienten ($g(x) = a$)

$$y' + ay = s(x) \implies y_h = Ke^{-ax}, \quad K \in \mathbb{R} \tag{3.2.8}$$

Die Ansatzfunktion y_p für die partikuläre Lösung lässt sich aus der folgenden Tabelle entnehmen. y_p ableiten, y_p und y_p' in die Gleichung (3.2.8) einsetzen. Durch Koeffizientenvergleich werden die Parameter bestimmt.

3.2.5 Numerische Integration

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Aufgabenstellung:
Gesucht ist ein Näherungswert an der Stelle $x_n = b$

$$y_n \approx y(b).$$

Dazu wird das Integrationsintervall in Teilintervalle eingeteilt.
Zerlegung des Integrationsintervalles $[a, b]$ in: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
mit der festen Schrittweite: $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$

Störfunktion $s(x)$	**Ansatzfunktion** $y_p(x)$
Polynom vom Grade n	Polynom vom Grade n : $y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ Parameter: $c_0, c_1, \ldots, c_n$
$s(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ oder $y_p = C\sin(\omega x + \varphi)$ Parameter: C_1, C_2 bzw. C, φ (auch wenn $A = 0$ oder $B = 0$)
$s(x) = Ae^{bx}$	$y_p = \begin{cases} Ce^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cxe^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$ Parameter: C

Tabelle 3.1: Lösungsansätze für eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y' + ay = s(x)$

Euler–Verfahren

$$y_i = y_{i-1} + h\, f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, ..., n$$

Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung

$$y_i = y_{i-1} + \tfrac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 1, ..., n$$

$$k_1 = h\, f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$k_2 = h\, f(x_{i-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \tfrac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\, f(x_{i-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \tfrac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h\, f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3)$$

Beispiel 3.1 *Euler- und Runge-Kutta-Verfahren*

Gegeben: $y' = -\frac{x}{y}$*, AB:* $x_0 = 0, y_0 = 1$
gesucht: Wert an der Stelle x=0,5
(Lösung: Kreis mit Radius 1, exakter Wert: y= 0.866025)

---

i	x_i	y_i	$hf(x_i, y_i) = -0,25\frac{x}{y}$
0	0.000000	1.000000	0.000000
1	0.250000	1.000000	-0.062500
2	0.500000	0.937500	

Tabelle 3.2: Euler-Verfahren mit n=2

i	x_i	y_i	$hf(x_i, y_i) = -0,125\frac{x}{y}$
0	0.000000	1.000000	0.000000
1	.125000	1.000000	-0.015625
2	.250000	0.984375	-0.031746
3	.375000	0.952629	-0.049206
4	.500000	0.903423	

Tabelle 3.3: Euler-Verfahren mit n=4

3.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition 3.7 *Randwertproblem*

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung, zu deren Lösung weitere Bedingungen (sogenannte Randbedingungen) für Werte der Funktion y (oder ihrer Ableitungen) an wenigstens 2 verschiedenen Stellen $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ vorgegeben sind, heißt Randwertproblem (RWP).

---

i	x	y	$k_i = hf(x,y) = -0,5\frac{x}{y}$
	0.000000	y_0 =**1.000000**	0.000000 $= k_1$
	0.250000	$y_0 + \frac{1}{2}k_1 = 1.000000$	-0.125000 $= k_2$
	0.250000	$y_0 + \frac{1}{2}k_2 = 0.937500$	-0.133333 $= k_3$
	0.500000	$y_0 + k_3 = 0.866667$	-0.288462 $= k_4$
1	x_1 =0.500000	y_1 =0.865812	

Tabelle 3.4: Runge-Kutta-Verfahren mit n=1

i	x	y	$k_i = hf(x,y) = -0,25\frac{x}{y}$
	0.000000	1.000000	0.000000
	0.125000	1.000000	-0.031250
	0.125000	0.984375	-0.031746
	0.250000	0.968254	-0.064549
1	x_1= 0.250000	y_1=0.968243	
	0.250000	0.968243	-0.064550
	0.375000	0.935968	-0.100164
	0.375000	0.918161	-0.102106
	0.500000	0.866137	-0.144319
2	x_2=0.500000	y_2=0.866008	

Tabelle 3.5: Runge-Kutta-Verfahren mit n=2

3.3.1 Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen 2. Ordnung

---

Methode 3.7 Überführung auf Differentialgleichung 1. Ordnung für Typ: $y'' = f(y)$

1. *Multiplikation mit $2y'$*

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2y'y'' &= 2y'f(y)\\ \Rightarrow \left[(y')^2\right] &= 2y'f(y)\\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}((y')^2)}{\mathrm{d}x} &= 2f(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

2. *Umformen und Integrieren*

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}((y')^2) = 2\int f(y)\mathrm{d}y$$
$$\Rightarrow y'^2 = 2\int f(y)\mathrm{d}y + C_1$$
$$\Rightarrow y' = \pm\sqrt{2\int f(y)\mathrm{d}y + C_1} \tag{3.3.1}$$

3. *Lösen von (3.3.1) (z.B. durch Trennung der Variablen).*

Methode 3.8 Überführung auf Differentialgleichung 1. Ordnung für Typ: $y'' = f(y')$ oder $y'' = f(x, y')$

1. *Substitution:*

$$u = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$\Rightarrow u' = y'' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

2. *Einsetzen in die Differentialgleichung$\Rightarrow$ Differentialgleichung 1. Ordnung für u.*

3. *Lösen der Differentialgleichung für u.*

4. *Rücksubstitution $\Rightarrow$ Differentialgleichung 1. Ordnung für y.*

5. *Lösen der Differentialgleichung für y*

3.3.2 Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

Definition 3.8 *Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.3.2}$$

heißt lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Satz: Eigenschaften der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

1. *Ist $y_1(x)$ eine Lösung von (3.3.2), so löst auch $C \cdot y_1(x)$ (3.3.2).*
2. *Sind $y_1(x), y_2(x)$ Lösungen von (3.3.2), so löst auch $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ (3.3.2).*
3. *Ist $y(x) = u(x) + jv(x)$ eine komplexe Lösung von (3.3.2), so sind auch $u(x), v(x)$ reelle Lösungen von (3.3.2).*

Definition 3.9 *Fundamentalbasis*

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ von (3.3.2) werden als Basislösungen, Basisfunktionen oder Fundamentalbasis bezeichnet, falls die Wronski-Determinante :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist.}$$

y_1, y_2 heißen dann linear unabhängig.

Satz: Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung von (3.3.2) ist als lineare Kombination zweier Basislösungen $y_1(x), y_2(x)$ *darstellbar:*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Methode 3.9 Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$
Bestimmung von λ *mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Es ergeben sich drei Fälle:

1. *Fall:* $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
   Fundamentalbasis: $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
   Allgemeine Lösung: $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$

2. *Fall:* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
   Fundamentalbasis: $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x}$
   Allgemeine Lösung: $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

3. *Fall:* $\lambda_{1,2} = \varphi \pm \mathrm{j}\,\omega, \quad \varphi, \omega \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *(konjugiert komplex)*
   Fundamentalbasis: $y_1 = \mathrm{e}^{\varphi x} \sin(\omega x)$, $y_2 = \mathrm{e}^{\varphi x} \cos(\omega x)$
   Allgemeine Lösung: $y = \mathrm{e}^{\varphi x}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$

3.3.3 Lineare inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.10 *Lineare inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = s(x) \tag{3.3.3}$$

heißt lineare inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
$s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet.

Satz: Allgemeine Lösung

Die Lösung der Differentialgleichung (3.3.3) ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung y_h und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung y_p:

$$y = y_h + y_p$$

Satz:

Hat eine Differentialgleichung die Form

$$y'' + ay' + by = s_1(x) + s_2(x) \tag{3.3.4}$$

und ist y_{p_1} Lösung von $y'' + ay' + by = s_1(x)$ und y_{p_2} Lösung von $y'' + ay' + by = s_2(x)$ so ist $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ eine partikuläre Lösung von (3.3.4).

Methode 3.10 Aufsuchen der partikulären Lösung

1. *Lösen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung* $\Rightarrow y_h$
2. *Berechnung einer partikulären Lösung y_p von (3.3.3) mit Hilfe einer Ansatzfunktion aus Tabelle (3.6)*
3. *Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$*

Störfunktion $s(x)$	**Ansatzfunktion** $y_p(x)$
$s(x) = P_m(x)$	$y_p = B_m(x)$, falls 0 **nicht Lösung** der char. Gleichung ist. $y_p = x^q B_m(x)$ falls 0 **q-fache Lösung** der char. Gleichung ist.
$s(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$	$y_p = B_m(x)e^{\alpha x}$, falls α **nicht Lösung** der char. Gleichung ist. $y_p = x^q B_m(x)e^{\alpha x}$, falls α **q-fache Lösung** der char. Gleichung ist.
$s(x) =$ $P_{1m}(x)\sin(\beta x) + P_{2m}(x)\cos(\beta x)$	$y_p = B_m(x)\sin(\beta x) + C_m(x)\cos(\beta x)$ falls $\pm j\beta$ **nicht Lösung** der char. Gleichung ist. $y_p = x^q[B_m(x)\sin(\beta x) + C_m(x)\cos(\beta x)]$ falls $\pm j\beta$ **q-fache Lösung** der char. Gleichung ist.
$s(x) =$ $e^{\alpha x}[P_{1m}(x)\sin(\beta x) + P_{2m}(x)\cos(\beta x)]$	$y_p = e^{\alpha x}[B_m(x)\sin(\beta x) + C_m(x)\cos(\beta x)]$ falls $\alpha \pm j\beta$ **nicht Lösung** der char. Gleichung ist. $y_p = x^q e^{\alpha x}[B_m(x)\sin(\beta x) + C_m(x)\cos(\beta x)]$ falls $\alpha \pm j\beta$ **q-fache Lösung** der char. Gleichung ist.

Tabelle 3.6: Lösungsansätze für die Differentialgleichung 2. Ordnung
$y'' + ay' + by = s(x)$

$P_m(x), B_m(x), C_m(x)$ sind Polynome vom Grade m; entweder ist $P_{1m}(x)$ ein Polynom vom Grade m und $P_{2m}(x)$ hat *höchstens den Grad* m oder umgekehrt.

3.4 Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

---

Definition 3.11 *Lineares inhomogenes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

Sei

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x \to \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{differenzierbar, und} \quad s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x \to \begin{pmatrix} s_1(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen vom Typ

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_1'(x) & = & a_{11}y_1(x) & + & a_{12}y_2(x) & + & \ldots & + & a_{1n}y_n(x) & + & s_1(x) \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n'(x) & = & a_{n1}y_1(x) & + & a_{n2}y_2(x) & + & \ldots & + & a_{nn}y_n(x) & + & s_n(x) \end{array}$$

heißt ***lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten****.*
$s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Falls $s(x) \neq 0$, so heißt das System ***inhomogen*** *ansonsten* ***homogen****.*
Das System lässt sich mit Matrizen wie folgt darstellen

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Systemmatrix:}A} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix}$$

3.4.1 Lösung des homogenen Systems

Satz:

Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor der Systemmatrix A des homogenen Systems $y'(x) = A \cdot y(x)$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x \to v \cdot e^{\lambda x}$$

eine Lösung des homogenen Systems.

Definition 3.12 *Fundamentalsystem*

n linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems heißen ***Lösungsfundamentalsystem****.*

Die Linearkombination aller Basislösungen φ_i des Lösungsfundamentalsystem bilden die allgemeine Lösung des Systems

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \varphi_i(x).$$

Die Aufgabe besteht also darin n unabhängige Lösungen zu finden.

Diagonalisierbare Systemmatrix A

Aus der Linearen Algebra wissen wir, falls die Systemmatrix diagonalisierbar ist, so sind die zugehörigen Eigenvektoren $v_i, i = 1 \ldots n$ und damit die Lösungen alle linear unabhängig.

Dabei können folgende Fälle unterschieden werden:

- Hat die Systemmatrix n verschiedene einfache reelle Eigenwerte $\lambda_i, i = 1 \ldots n$, so sind die zugehörigen Eigenvektoren $v_i, i = 1 \ldots n$ und damit die Lösungen alle linear unabhängig.
- Sind unter den n verschiedenen einfachen auch konjugiert komplexe Eigenwerte, so erhält man auch komplexe Eigenvektoren und komplexe Lösungen. Von den komplexen Lösungen werden Real- und Imaginärteil ermittelt, die entstehenden Lösungen sind wieder linear unabhängig.
- Hat die Systemmatrix auch mehrfache Eigenwerte, so gehören zu einem k-fachen Eigenwert auch k linear unabhängige Eigenvektoren, somit sind die Lösungen auch linear unabhängig.

Ein Problem entsteht dann, wenn die Matrix nicht diagonalisierbar ist. Zu einem k-fachen Eigenwert gehören dann weniger als k Eigenvektoren und damit zu wenig Lösungen.

Eigenwerte mit Vielfachheit: Hauptvektoren

Satz: Lösung durch Hauptvektoren

Sei λ eine doppelter Eigenwert der Systemmatrix A mit nur einem zugehörigen Eigenvektor v_1. Dann besitzt die Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot v = v_1$$

*genau eine Lösung v_2 . Dieser Vektor wird **Hauptvektor** der Systemmatrix A genannt.*
Eine weitere linear unabhängige Lösung ergibt sich dann durch

$$\varphi_2 = \mathrm{e}^{\lambda x} \left(v_2 + x v_1 \right).$$

Damit lauten die beiden Basislösungen bezogen auf λ: $\mathrm{e}^{\lambda x} v_1, \mathrm{e}^{\lambda x} \left(v_2 + x v_1 \right)$.

Hat der Eigenwert die Vielfachheit k, dann werden die weiteren Hauptvektoren rekursiv gebildet: v_3 berechnet sich aus dem Hauptvektor v_2: $(A - \lambda E) \cdot v_3 = v_2$ usw..
Das (Teil-)Fundamentalsystem (bez. auf den Eigenwert λ mit Vielfachheit k) ergibt sich dann wie folgt:
$\left\{ \mathrm{e}^{\lambda x} v_1, \mathrm{e}^{\lambda x} \left(v_2 + x v_1 \right), \mathrm{e}^{\lambda x} \left(v_3 + x v_2 + \frac{1}{2} x^2 v_1 \right), \ldots, \mathrm{e}^{\lambda x} \left(v_k + x v_{k-1} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} v_1 \right) \right\}$.

3.4.2 Lösung des inhomogenen Systems

Genau wie bei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung gilt der folgende Satz:

Satz: Allgemeine Lösung

Die Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogene Systems y_h und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung y_p:

$$y = y_h + y_p$$

Die Lösungsansätze für $y_{p1}, \ldots y_{pn}$ hängen von den Störfunktionen $s_1, \ldots, s_n$ ab. Sie können mit Hilfe der Tabelle (3.6) ermittelt werden, die Tabelle gilt nur für die Fälle, dass λ kein Eigenwert ist. In jeder Ansatzfunktion muss **jede Störfunktion** berücksichtigt werden.

Methode 3.11 Aufsuchen der partikulären Lösung

1. *Lösen des zugehörigen homogenen Systems* $\Rightarrow y_h$

2. *Berechnung einer partikulären Lösung* $y_p = \begin{pmatrix} y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn} \end{pmatrix}$ *mit Hilfe von Ansatzfunktionen aus Tabelle (3.6), die Tabelle gilt nur für die Fälle, dass* λ *kein Eigenwert ist*

3. *Allgemeine Lösung:* $y = y_h + y_p$

3.4.3 Überführung auf ein System 1. Ordnung: Zustandsform

Jede lineare Differentialgleichung höherer Ordnung und jedes System von Differentialgleichungen höherer Ordnung kann in ein System 1. Ordnung, die sogenannte **Zustandsform** überführt werden. Dieses System 1. Ordnung kann dann aus den vorherigen Abschnitten gelöst werden.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = a_1 y + a_2 y' + \dots + a_n y^{(n-1)} + s(x)$$

Anfangsbedingungen:
$y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$

Zustandsform:

Zustandsgrößen:
$z_1 = y, z_2 = y', z_3 = y'', \dots z_n = y^{(n-1)}$

Umformung in ein System 1. Ordnung:

$$\begin{array}{lcll} z'_1 & = & z_2 & , \quad z_1(x_0) = y(x_0) \\ z'_2 & = & z_3 & , \quad z_2(x_0) = y'(x_0) \\ & \vdots & & , \quad \vdots \\ z'_{n-1} & = & z_n & , \quad z_{n-1}(x_0) = y^{(n-2)}(x_0) \\ z'_n & = & a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n + s(x) & , \quad z_n(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{array}$$

System von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1' \dots, y_n') = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_{11}y_1' + \dots + b_{1n}y_n' + s_1(x) \\
&\vdots \\
y_n'' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1' \dots, y_n') = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_{n1}y_1' + \dots + b_{nn}y_n' + s_n(x)
\end{aligned}
$$

Anfangsbedingungen:

$$y_1(x_0), \dots, y_n(x_0), y_1'(x_0), \dots, y_n'(x_0)$$

Zustandsform:

Zustandsgrößen:

$$z_1 = y_1, \dots, z_n = y_n$$

$$z_{n+1} = y_1', \dots, z_{2n} = y_n'$$

Umformung in ein System 1. Ordnung:

$$
\begin{array}{lcll}
z'_1 &=& z_{n+1} & , \; z_1(x_0) = y(x_0) \\
& \vdots & & , \; \vdots \\
z'_n &=& z_{2n} & , \; z_n(x_0) = y_n(x_0) \\
\hline
z'_{n+1} &=& a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_{11}y_1' + \dots + b_{1n}y_n' + s_1(x) & , \; z_{n+1}(x_0) = y_1'(x_0) \\
& \vdots & & , \; \vdots \\
z'_{2n} &=& a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_{n1}y_1' + \dots + b_{nn}y_n' + s_n(x) & , \; z_{2n}(x_0) = y_n'(x_0)
\end{array}
$$