Probeklausur 23.6.2013

1. (Lineare Algebra) Gegeben sei die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3. Welche geometrische Eigenschaft haben die Eigenvektoren?

   (c) Geben Sie eine 3×3-Matrix $\mathcal{B}$ an, so dass $\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Eigenwerte darstellen.

2. (Differenziation)

   Gegeben sei die Funktion

$$y(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} \text{ definiert für } x \in [-2, 2].$$

   (a) Man berechne - soweit vorhanden - die Extremwerte der Funktion im Definitionsbereich und gebe deren Art an. Geben sie eventuelle Wendepunkte - $f''(x) = 0$ - an.

   (b) Man gebe die Tangentengleichung im Punkte $x = 0$ an.

   (c) Welche Nullstellen hat die Funktion im Definitionsinterval lund mit welcher Steigung?

3. (Integration)

   (a) Man berechne die Fläche, die von der $y-$Achse und den Graphen der Funktionen

$$f(x) = \cos^2(x) \text{ und } g(x) = \sin^2(x), \text{ für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

   eingeschlossen wird.

   (b) Man bestimme für einen festen Parameter $t > 0$

$$\int_0^x ue^{-ut} du$$

   Danach berechne man

$$g(t) = \int_0^\infty ue^{-ut} du$$

   Man gebe den maximalen Definitionsbereich von g an.

4. (Taylorreihe) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 6 \cdot \cos(x) \cdot \cosh(x) + 4$$

   (a) Berechnen Sie das Polynom $T_4(x)$ der Mc-Laurin-Reihe (Taylorreihe an der Stelle $x = 0$).
   Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

   (b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 T_4(x)dx$

5. (Komplexe Zahlen) Gegeben sind die zwei komplexen Zahlen:

$$z_1 = 4i \quad \text{und} \quad z_2 = 1 \cdot \exp(i\frac{\pi}{3}).$$

(a) Berechnen Sie

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}, z_4 = z_3^4.$$

Geben Sie die Lösung in arithmetischer Form und in Exponentialform an.

(b) Berechnen Sie

$$z_5 = \sqrt[3]{z_4}.$$

Geben Sie die Lösungen in arithmetischer Form und in Exponentialform an.

(c) Zeichnen Sie z_3, z_4 und z_5 in die gegebene Gauß'sche Zahlenebene.