Probeklausur 2. Semester SoSe13

1. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 10 Punkte)**

   Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

   $$z = f(x, y) = x^2 + \left(x^2 - 1\right) \cdot (y + 1) - 1$$

   (a) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

   (/ca. 6)

   (b) Nun sei $f(x, y)$ auf die Gerade $g : y = -2x$ eingeschränkt (d.h. in f müssen Sie $y = -2x$ setzen). Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $f(x, y)$ auf die Gerade g an der Stelle $E_1(1; -2)$ ein lokales Maximum besitzt.

   (/ca. 4)

2. **Aufgabe: Differenzialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 10 Punkte)**
   Gegeben ist die Differenzialgleichung 1. Ordnung

   $$y' + \cot(x) \cdot y = \cos(x)\,, \quad \text{mit } \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ 0 < x < \pi$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGl.

   (/ca. 8)

   (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $y_0 = y(x_0) = 0$.

   (/ca. 2)

3. **Aufgabe: Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** **(/ ca. 12 Punkte)**
   Es sei $a > 0$. Gegeben sei die lineare inhomogene Differenzialgleichung 2.Ordnung

   $$a^2 y'' + y = \sin(2x)$$

   (a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$ an.

   (/ca. 2)

   (b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogene Differenzialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0, a \neq \frac{1}{2}$.

   (/ca. 3)

   (c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogene Differenzialgleichung für $a = \frac{1}{2}$.

   (/ca. 3)

(d) Bestimmen Sie nun für $a = \frac{1}{2}$ die spezielle Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ an (benutzen Sie die allgemeine Lösung aus Teil c)) .

(/ca. 2)

4. **Aufgabe: Vektorfelder** **(/ ca. 10 Punkte)**
Mit festen $a, b \in \mathbb{R}$ sei das auf $\mathbb{R}^3$ definierte Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = (axy - 5\cos 2z, 3x^2 + bze^{-y}, 10x\sin(2z) + e^{-y}). \tag{1}$$

a) Man bestimme a und b so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist.

(/ca. 2)

b) Man bestimme für die in a) gefundenen Parameter a, b ein Potential f von $\vec{v}$.

(/ca. 5)

c) Es seien $a = 1$ und $b = 0$ in der Gleichung (1) gesetzt. Dann berechne man das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} d\vec{r},$$

wobei $\mathcal{C}$ die geradlinige Verbindung zwischen $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$ ist.

(/ca. 3)

5. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 10 Punkte)** Gegeben ist die Kurve

$$x = \sin 2t, y = \sin 3t, \ 0 \leq t \leq \pi.$$

(a) Man ermittle die Stellen für die horizontale und vertikale Tangente.

(/ca. 3)

(b) Man berechne die Krümmung κ für die Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ und gebe den Krümmungsradius an.

(/ca. 3)

(c) Man berechne den Flächeninhalt, der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.

(/ca. 4)