1	2	3	4	5	Σ Pkt
9	8	5	7	8	37

Note:

0 – 12	5
13 –	4
19 –	3
25 – 3	2
31 – 37	1

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 2000

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Axt, Eich-Soellner, Plöchinger

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

9

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = x \cdot e^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie hierzu

a) das Extremum x_0,

$$y' \underset{(1)}{=} e^{-x} \cdot [1 - x] \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1 \doteq x_0$$

$$y_0 \doteq f(x_0) = \frac{1}{e}$$

$x_0 =$ 1 (1)

b) das Integral $I = \int_0^2 f(x)\,dx$,

$$I = \int_0^2 \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^{-x}}\,dx \overset{(1)}{=} \left[-x e^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,dx = \quad (2)$$

$$= -2 \cdot e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = 1 - 3e^{-2} \underset{(1)}{=} 0{,}593\,994$$

c) das MacLaurin-Polynom $T_3(x)$ der Ordnung $n = 3$,

$$f(x) = x \cdot \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots\right] \approx x\left[1 - x + \frac{x^2}{2}\right] = T_3(x) \quad (1)$$

$T_3(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2}$ (2)

d) das Integral $\tilde{I} = \int_0^2 T_3(x)\,dx$,

$$\tilde{I} = \int_0^2 \left[x - x^2 + \frac{x^3}{2}\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \quad (1)$$

$$= 2 - \frac{8}{3} + \frac{16}{8} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

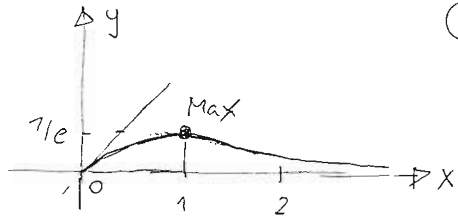
e) den Grenzwert $y_\infty = \lim_{x \to \infty} f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \doteq \frac{u}{v} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}; \quad \frac{u'}{v'} = \frac{1}{e^x} \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

$y_\infty =$ 0 (1)

f) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \geq 0$. (2)

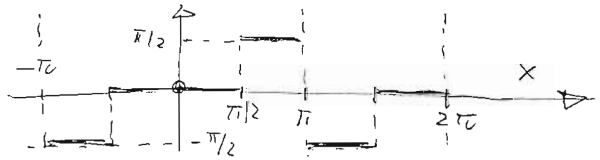
x	0	1	∞
y	0	$\frac{1}{e}$	0
y'	1	0	0



8

Aufgabe 2: Sei $y = f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ eine *ungerade* 2π-periodische Funktion.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ im Bereich $-\pi \leq x \leq 2\pi$, (2)



b) berechnen Sie von $y = f(x)$ die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n für $n = 1, 2, 3, 4$,

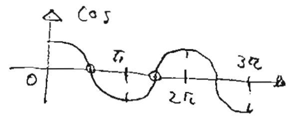
$a_n =$ 0, da $f(x)$ ungerade ⇒ (1)

$$b_n = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x) \cdot \sin(n\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cdot \sin(nx)\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right] \quad (2)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \begin{cases} 0 - (-1) = 1 & , n = 1 \\ -1 - 1 = -2 & , n = 2 \\ 0 - (-1) = 1 & , n = 3 \\ 1 - 1 = 0 & , n = 4 \end{cases} \quad (1)\ (1)$$



$b_1 = 1 \qquad b_2 = -1 \qquad b_3 = 1/3 \qquad b_4 = 0$ (4)

c) ermitteln Sie von $y = f(x)$ das Fourier-Polynom $F_4(x)$ der Ordnung $n = 4$.

$F_4(x) = \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + 0\cdot\sin 4x$ (1)

b)

5

Aufgabe 3: Die Viertelellipse $\mathcal{E}$ mit den Radien a und b ist in Parameterform gegeben durch $x = a\cdot\cos t$ und $y = b\cdot\sin t$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{E}$ hat die Länge $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$, (2)

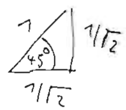
$\dot{x} = -a\cdot\sin t$ (1) $\dot{y} = b\cdot\cos t \Rightarrow ds = \sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t}_{(\dot x)^2} + \underbrace{b^2\cos^2 t}_{(\dot y)^2}}\, dt$

$\Rightarrow L = \int_0^{\pi/2} ds = \ldots$ (1)

b) nach der Faßregel von Kepler gilt $L \approx L^* = \frac{\pi}{12}\left[a + b + 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right]$. (3)

$L = \int_0^{\pi/2} w\, ds$, $w := \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

t	0	$\pi/2$	$\pi/4$
w	b	a	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (1)
Nr.	0	2	1



$L^* \overset{FR}{\underset{(1)}{=}} \frac{\pi/2 - 0}{6}\cdot\left[w_0 + 4w_1 + w_2\right] = \frac{\pi}{12}\cdot\left[a + b + 4\sqrt{\quad}\right]$ (1)

7

Aufgabe 4: Das Wasser in einem Zylinderbottich vom Radius R entleert sich durch ein kleines Loch vom Radius r am Boden. Die zeitabhängige Pegelhöhe $y = \varphi(t)$ des Wassers erfüllt die DGL

$$\dot{y} = -\kappa\cdot\sqrt{y} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{r^2}{R^2}\cdot\sqrt{2g} \quad \text{und} \quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

a) Berechnen Sie die *allgemeine Lösung* y der DGL. (3)

$\frac{dy}{dt} = -\kappa\cdot\sqrt{y} \overset{\text{trennen}}{\Rightarrow} -\kappa\cdot(t+c) = -\kappa\int dt \overset{(1)}{=} \int\frac{dy}{\sqrt{y}}$ (1)

$= \frac{y^{1/2}}{1/2} \Rightarrow \underline{\sqrt{y} = -\frac{\kappa}{2}(t+c)}$ (1) (*)

oder $y = \left[\frac{\kappa}{2}(t+c)\right]^2$

b) Zeigen Sie: $y = \left[\sqrt{y_0} - \frac{\kappa}{2}t\right]^2$ ist die *spezielle Lösung* der DGL mit $y = y_0$ bei $t = 0$. (2)

$t = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{y_0} = -\frac{\kappa}{2}\cdot c \overset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{y} = -\frac{\kappa}{2}\cdot t + \sqrt{y_0}$

$\Rightarrow y = \left[\sqrt{y_0} - \frac{\kappa}{2}t\right]^2$ Achtung: $c \neq (+) \frac{2\sqrt{y_0}}{\kappa}$

c) Sei jetzt $r = 2$ cm und $R = 20$ cm und $y_0 = 1$ m. Nach welcher Zeit T ist der Bottich leer? (2)

$T = 45.152$ sec (1)

$y(T) = 0 \Rightarrow \sqrt{y_0} - \frac{\kappa}{2}\cdot T = 0 \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{y_0}}{\kappa} = \frac{200}{4.4294}$

NR: $\kappa = \left(\frac{2}{20}\right)^2\cdot\sqrt{2g} = \frac{\sqrt{2g}}{100} = \frac{4.4294}{100}$

8

Aufgabe 5: Die Koordinaten der Punkte $P(x,y,z)$ einer Fläche $\mathcal{F}$ im Raum erfüllen die Gleichung $(x-2)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{z}\right)^2 = 5 - z^2$.

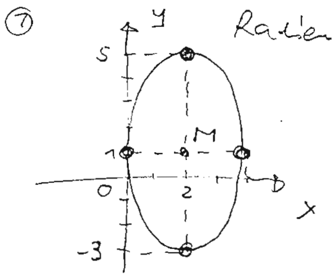
a) Ermitteln Sie die implizite Gleichung, den Typ und die Bestimmungsgrößen der Schnittkurve $\mathcal{E}_c$ von $\mathcal{F}$ mit der Ebene $z = c$ für die Höhen $0 < c \le \sqrt{5}$. (3)

$\mathcal{E}_c: \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-\frac{1}{c})^2}{b^2} = 1$ (1), $a = \sqrt{5-c^2}$, $b = 2\cdot a$ (1) $\Rightarrow$ achsen-// Ellipse mit MP $M(2, \frac{1}{c})$ & Radien a, b (1)

b) Skizzieren Sie $\mathcal{E}_c$ für $c = 1$. (2)

$a = 2 \quad M(2,1)$

$b = 4$



c) Zeigen sie: $\mathcal{E}_c$ umschließt eine ebene Fläche mit dem Inhalt $A(c) = 2\pi(5-c^2)$. (1)

Ellipse $\mathcal{E}_c$ hat Inhalt $A = \pi\cdot a\cdot b \underset{a)}{=} 2\pi(5-c^2)$

d) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der im Bereich $0 \le z \le \sqrt{5}$ durch $\mathcal{F}$ und die (x,y)-Ebene begrenzt wird. (2)

$V = \int_0^{\sqrt{5}} A(c)\, dc = 2\pi\cdot\left[5c - \frac{c^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} =$

$= 2\pi\cdot\left[5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3}\right] = \frac{4\pi}{3}5\sqrt{5} = 14{,}9712\cdot\pi = \underline{46{,}832}$