→ Fr. Kloster

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN — FACHBEREICH 03 FA — SS 2001

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Axt, Gröger, Kloster, Plöchinger, Radtke

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

10 **Aufgabe 1:** Die Koordinaten eines Punktes $P(x,y)$ der ebenen Kurve C seien in Parameterform gegeben durch $x = 1 + \cosh t$ und $y = 2\sinh t$ mit $t \in [0, \ln 4]$. Sei A der Inhalt der Sektorfläche, die der Radius OP überstreicht, wenn P die Kurve durchläuft. Ermitteln Sie

a) die Krümmung κ der Kurve im Anfangspunkt $S(2,0)$, (3)

$\dot x = sh\,t, \quad \dot y = 2\,ch\,t, \quad \ddot x = ch\,t, \quad \ddot y = 2\,sh\,t, \quad t = 0$ (1)

$$\kappa = \frac{\ddot y \cdot \dot x - \ddot x \cdot \dot y}{[(\dot x)^2 + (\dot y)^2]^{3/2}} = 2 \cdot \frac{sh^2 t - ch^2 t}{[sh^2 t + 4\,ch^2 t]^{3/2}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \;//\; (1)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = -4$$

b) den Inhalt $A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ln 4} [x\dot y - y \cdot \dot x]\, dt =$ (3)

$$= \frac{2}{2} \int_0^{\ln 4} \Big[(1 + ch\,t)\,\underbrace{ch\,t - sh^2 t}_{=1}\Big]\, dt = \int_0^{\ln 4} [ch\,t + 1]\, dt$$ (1)

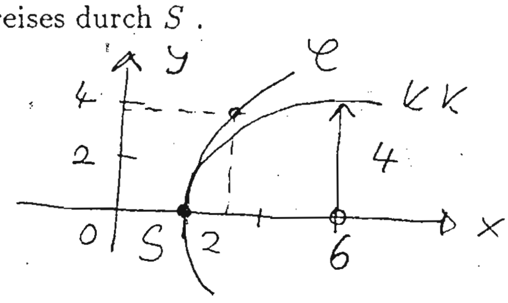
$$= [sh\,t + t]_0^{\ln 4} = sh(\ln 4) + \ln 4 = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} + \ln 4 = \underline{\underline{3{,}26129}}$$ (1) (1)

c) eine explizite Formel $y = f(x)$ der Kurve (Hinweis: $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$), (2)

$$y = 2 \cdot \sqrt{ch^2 t - 1} = 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 - 1} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}}}$$ (1)

d) eine Skizze der Kurve und des Krümmungskreises durch S. (2)

t	0	$\ln 4$
x	2	$3 + 1/8$
y	0	$4 - 1/4$



5

Aufgabe 2: Sei $y = \sin x$ mit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Gleichung einer Kurve C in der (x, y)-Ebene. Der ebene Bereich D werde begrenzt von C, der x-Achse und der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$. Ermitteln Sie

a) den Inhalt A von D, (1)

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi/2} = 1 //$$

b) die Koordinate y_S des Schwerpunktes $S(x_S, y_S)$ von D, (3)

$$y_S = \frac{1}{2A} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \overset{FS}{=} \frac{1}{2A} \left[\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2}\right]_{x=0}^{\pi/2} \quad (1) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2A} \cdot \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{8} // \quad (1)$$

c) das Volumen V des Körpers, der bei der Rotation von D um die x-Achse entsteht. (1)

$$V_x = 2\pi \cdot y_S \cdot A = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} //$$

12

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL $y'' + y' + 2y = 0$. (4)

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad (1) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = y_h = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2}} \quad (1) \quad ; \quad y_1 = e^{-x/2} \cdot \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2} x\right), \quad y_2 = e^{-x/2} \cdot \sin\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2} x\right) \quad (1)$$

b) Die *homogene* DGL $y'' + y' - 2y = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$. Ermitteln Sie von der *inhomogenen* DGL $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$

b1) eine partikuläre Lösung $y_p \underset{(1)}{=} C \cdot x \cdot e^{-2x}$ (Resonanz!) (4)

f. Ansatz

$$\Rightarrow y_p' = C \cdot e^{-2x} \cdot [1 + x \cdot (-2)] = C \cdot e^{-2x} [1 - 2x] \quad (1)$$

$$y_p'' = C \cdot e^{-2x} \cdot [(-2) + (1-2x) \cdot (-2)] = C \cdot e^{-2x} \cdot [-4 + 4x] \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3e^{-2x} = y_p'' + y_p' - 2y_p = C \cdot e^{-2x} \cdot [(-4 + \cancel{4x}) + (1 - \cancel{2x}) - \cancel{2x}]$$

$$= -3 \cdot C \cdot e^{-2x} \Rightarrow C = -1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_p = -x \cdot e^{-2x}}}$$

b2) diejenige Lösung, welche die Anfangswerte $y = 0$ und $y' = 2$ bei $x = 0$ hat. (4)

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^x + [C_2 - x] \cdot e^{-2x} \underset{x=0}{=} C_1 + C_2 = 0$$
(1)

$$y' = C_1 \cdot e^x + [-1 + (C_2 - x)(-2)] e^{-2x} = C_1 - 2C_2 - 1 = 2$$
(1)

$$\Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow C_1 + 2C_1 = 3 \Rightarrow C_1 \underset{(1)}{=} 1 \Rightarrow C_2 \underset{(1)}{=} -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = e^x - (1+x)}} e^{-2x}$$

7

Aufgabe 4: Das bestimmte Integral $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx$ einer Funktion $y = f(x)$ mit $x \in [-1, 1]$ werde genähert durch $G = f(-d) + f(d)$. Hierbei ist d eine geeignete Stützstelle aus $[0, 1]$.

a) Berechnen Sie I und G bei $f(x) = x^2$. (2)

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}$$ (1)

$$G = (-d)^2 + (d)^2 = 2d^2$$ (1)

b) Bestimmen Sie d so, daß gilt $I = G$ bei $f(x) = x^2$. (1)

$$G = I \underset{a)}{\Rightarrow} d^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

c) Sei jetzt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Berechnen Sie c1) G bei $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$, (1)

$$G = \frac{\sin(-d)}{-d} + \frac{\sin(d)}{d} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{3}}}{1/\sqrt{3}} = \underline{\underline{1.89072}}$$

c2) die KEPLER-Näherung Q von I . (3)

$$Q = \frac{2}{6} \cdot [f(-1) + f(1) + 4 \cdot f(0)] \underset{(1)}{=}$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left[\frac{\sin(-1)}{-1} + \frac{\sin(1)}{1} + 4 \cdot \frac{\sin(0)}{0} \right] =$$

(1) // L'H

$$= \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\sin(1)}{1} + 4 \cdot 1 \right] = \frac{1}{3} [2 \cdot 0.8414 + 4] = \underline{\underline{1.8943}}$$

(1)

6 **Aufgabe 5**: Sei y die Lösung der DGL $y' = -2xy^2$ mit dem Anfangswert $y = \frac{1}{2}$ bei $x = -1$. Ermitteln Sie die RUNGE-KUTTA-Näherung $\mathbf{y_1}$ für den Wert y bei $x = 0$. Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = -1$ und die Schrittweite $h = 1$. (6)

$$x_0 = -1, \quad y_0 = \frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad x_1 = 0, \quad f = -2xy^2$$

(1) $$K_1 = f(x_0, y_0) = f(-1, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

(1) $$(x,y)_{II} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot K_1\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right), \quad K_2 = f(x,y)_{II} = \frac{9}{16}$$

(1) $$(x,y)_{III} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot K_2\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{32}\right), \quad K_3 = f(x,y)_{III} = \left(\tfrac{25}{32}\right)^2$$

(1) $$(x,y)_{IV} = \left(0, \tfrac{1}{2} + 1\cdot k_3\right) = (0, \dots), \quad K_4 = f(x,y)_{IV} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h\cdot\frac{k_1 + 2(k_2+k_3) + k_4}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1/2 + 9/8 + \frac{625}{512} + 0}{6} = \underline{\underline{0.97428\dots}}$$

(5) (6)

1	2	3	4	5	Σ
10	5	12	7	6	40

Schlüssel

0 – 15	5
16 – 21	4
22 – 27	3
28 – 33	2
34 – 40	1