- 1 -

Fachhochschule München — Fachbereich 03 FA — SS 02

Diplomvorprüfung in Mathematik - Fahrzeugtechnik -

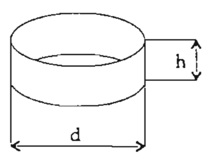
Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Plöchinger, Rast, Schwägerl

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

4

Aufgabe 1: Beim Tiefziehen wird aus einer dünnen Blechscheibe mit dem Durchmesser D ein Zylindertopf mit dem Durchmesser d und der Höhe h gezogen. Dabei haben die Blechscheibe und der Topf den selben Oberflächeninhalt $A = \frac{D^2\pi}{4}$. Zeigen Sie:



a) der Scheibendurchmesser ist exakt gegeben durch $D = d\sqrt{1+\frac{4h}{d}}$, (2)

$$A = \frac{D^2\pi}{4} \overset{1}{=} \frac{d^2\pi}{4} + d\pi h \Rightarrow D^2 = d^2 + 4dh \Rightarrow$$

$$D = \sqrt{d^2+4dh} = d\cdot\sqrt{1+\frac{4h}{d}}$$

b) bei $4h/d \approx 0$ hat man die Näherungsformel $D \approx d + 2h$. (2)

(1) $$x := \frac{4h}{d} \approx 0 \overset{\text{Binomial-}}{\underset{\text{Polynom}}{\Rightarrow}} \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$D \approx d\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right) = d + 2h$$

12

Aufgabe 2: Eine ebene Kurve $\mathcal{H}$ sei in Parameterform gegeben durch $x = \cosh(t)$ und $y = \frac{4}{5}\sinh(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Sei $P(x_0, y_0)$ der Punkt auf $\mathcal{H}$ mit dem Parameter $t = \ln 2$.

a) Zeigen Sie, daß P die Koordinaten $x_0 = \frac{5}{4}$ und $y_0 = \frac{3}{5}$ hat, (1)

$$x_0 = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \quad y_0 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

b) ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t von $\mathcal{H}$ in P, (3)

(2) $$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\frac{4}{5}\cdot ch}{sh} \overset{a)}{=} \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}}{3/4} = \frac{4}{3}$$

(1) $$t: y = y_0 + y'\cdot(x-x_0) = \frac{3}{5} + \frac{4}{3}\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right) = -\frac{16}{15} + \frac{4}{3}x$$

→ Fr. Kloster

- 2 -

c) berechnen Sie den Krümmungsradius ρ von $\mathcal{H}$ in P, in P (2)

(1) $$\dot x = \frac{3}{4}, \quad \dot y = 1, \quad \ddot x = x_0 = \frac{5}{4}, \quad \ddot y = y_0 = \frac{3}{5}$$

(1) $$\Rightarrow \chi = \frac{\dot x\cdot\ddot y - \ddot x\cdot\dot y}{[(\dot x)^2+(\dot y)^2]^{3/2}} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5} - \frac{5}{4}\cdot 1}{[(\frac{3}{4})^2+1^2]^{3/2}} = \frac{\frac{9-25}{20}}{[\frac{25}{16}]^{3/2}}$$

$$= -\frac{16/20}{(5/4)^3} = -\left(\frac{4}{5}\right)^4 \Rightarrow \rho = 1/\chi = -2.4414$$

d) berechnen Sie den Inhalt A der Sektorfläche von $\mathcal{H}$ zwischen den Punkten $S(1,0)$ und P, (3)

$$\text{bei } S \text{ ist } t = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\ln 2}[x\cdot\dot y - y\cdot\dot x]\,dt$$

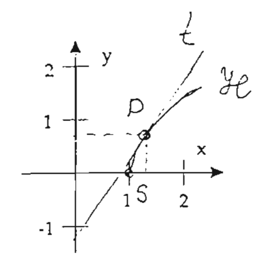
$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\ln 2}\left[ch t\cdot\frac{4}{5}ch t \overset{1}{-} \frac{4}{5}sh t\cdot sh t\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{\ln 2}[ch^2 t - sh^2 t]\,dt = \frac{2}{5}\cdot\int_0^{\ln 2} 1\,dt = \frac{2}{5}\cdot\ln 2 \approx 0.27726$$

e) zeigen Sie, daß $\mathcal{H}$ die implizite Gleichung $x^2 - \left(\frac{y}{4/5}\right)^2 = 1$ mit $x > 0$ hat, (1)

$$x^2 - \left(\frac{y}{4/5}\right)^2 = ch^2 - sh^2 = 1$$

f) skizzieren Sie die Tangente t und die Kurve $\mathcal{H}$. (2)



16

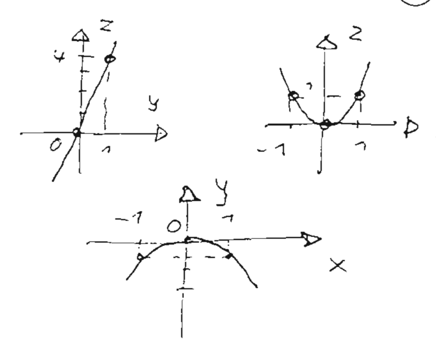
Aufgabe 3: Gegeben ist der Graph G_f der Funktion $z = f(x,y) = x^2 + 4y$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie ein Basisbereich D in der (x,y)-Ebene, der links von der y-Achse, unten von der x-Achse und oben von der Kurve $y = 4 - x^2$ begrenzt ist. Gesucht sind

a) Gleichung und Skizze der Schnittkurven von G_f mit den drei Koordinatenebenen, (6)

(1+1) $G_f \cap \{x=0\}: \; z = 4y$

(1+1) $G_f \cap \{y=0\}: \; z = x^2$

(1+1) $G_f \cap \{z=0\}: \; y = -\frac{x^2}{4}$

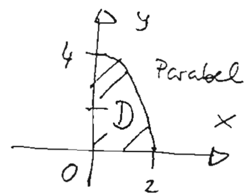


b) die Gleichung der Tangentialebene τ von G_f im Punkt $A(1,4,z_0) \in G_f$, (3)

(2) $f_x = 2x = 2 \; , \; f_y = 4 \; , \; z_0 = f(1,4) = 17$

$\Rightarrow \tau : \underline{\underline{z}} = 17 + 2\cdot(x-1) + 4\cdot(y-4) = \underline{\underline{-1+2x+4y}}$ (1)

c) eine Skizze von D , (2)



d) das Volumen V des vertikalen Zylinders, der zwischen D und G_f liegt. (5)

$$V \overset{(1)}{=} \int_{x=0}^{2} \left[\int_{y=0}^{4-x^2} (x^2+4y)\, dy \right] dx \overset{(1)}{=} \int_{x=0}^{2} \left[x^2 y + 2y^2 \right]_{y=0}^{4-x^2} dx$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{x=0}^{2} \left[x^2(4-x^2) + 2(4-x^2)^2 \right] dx = \int_{x=0}^{2} \left[(4x^2 - x^4) + (32 - 16x^2 + 2x^4) \right] dx$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{x=0}^{2} \left[-12x^2 + x^4 + 32 \right] dx = \left[-\frac{12}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + 32x \right]_0^2$$

$$= -4\cdot 8 + \frac{32}{5} + 64 = 32 + \frac{32}{5} = \frac{192}{5} = 38{,}4 \;//$$

10

Aufgabe 4: Ermitteln Sie zu der linearen DGL $y'' + 4y' + 4y = b(x)$ mit einer rechten Seite $b(x)$

a) Basislösungen y_1 und y_2 , (3)

$0 = p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (2) $\Rightarrow$

$\underline{\underline{y_1 = e^{-2x}}} \; , \; \underline{\underline{y_2 = x \cdot e^{-2x}}}$ (1)

b) einen geeigneten Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p bei $b(x) = \cosh(2x) + x^2 \cdot \sin(x)$, (2)

$b(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-2x}}_{\text{Resonanz}} + x^2 \cdot \sin x \quad , \; e^{-2x} = BL \;\; \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$

$y_p = A \cdot e^{2x} + B \boxed{x^2} e^{-2x} +$

$+ (C_1 + D_1 x + E_1 x^2) \cdot \cos x + (C_2 + D_2 x + E_2 x^2) \sin x$

c) eine partikuläre Lösung y_p bei $b(x) = 24\sin(2x)$. (5)

4.	$y_p \overset{(1)}{=} A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$ (Ansatz) $\Rightarrow$
4.	$y_p' = 2B \cdot \cos 2x - 2A \cdot \sin 2x$ (1) $\Rightarrow$
1.	$y_p'' = -4A \cdot \cos 2x - 4B \cdot \sin 2x$ (1) $\Sigma \Rightarrow$

$24 \cdot \sin 2x \overset{(1)}{=} 8B \cdot \cos 2x - 8A \cdot \sin 2x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = -3 \\ B = 0 \end{array} \right\}$ (1)

$\Rightarrow y_p = -3 \cdot \cos 2x \;//$

6

Aufgabe 5: Sei y die exakte Lösung der DGL $y' = (2-y)\cdot y$ mit $y = 1$ bei $x = 0$. Ermitteln Sie mit dem Verfahren von Runge-Kutta in e i n e m Schritt eine Näherung y_1 von y bei $x = 1$. (6)

$x_0 = 0 \; , \; y_0 = 1 \; , \; x_1 = 1 \; , \quad h = x_1 - x_0 = 1$ (1 Schritt

$f(x,y) = (2-y)\cdot y \quad , \; \bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \frac{k_1 + 2\cdot(k_1 + k_2) + k_3}{6} = y_0 + h \cdot k$$

(1) $k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1 \;//$

(1) $k_2 = f(\bar{x}, y_0 + \frac{h}{2} k_1) = f(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\cdot 1) = (2 - \frac{3}{2}) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \;//$

(1) $k_3 = f(\bar{x}, y_0 + \frac{h}{2} k_2) = f(\frac{1}{2}, \frac{11}{8}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{11}{8} = \frac{55}{64} \approx \underline{0{,}859}$

(1) $k_4 = f(x_1, y_0 + h \cdot k_3) = f(\frac{1}{2}, 1 + \frac{55}{64}) = \frac{9}{64} \cdot \frac{119}{64} = \frac{1071}{4096}$

$\Downarrow \qquad \approx \underline{\underline{0.261475}}$

(2) $k = \frac{6117}{8192} \approx 0.746704 \Rightarrow y_1 = \underline{1.7467} \;//$

$\underline{\text{Schlüssel}}$:

$\Sigma = 4 + 12 - 16 - 10 + 6 = 48$

5	0 - 17
4	18 - 24
3	25 - 31
2	32 - 38
1	39 - 48