Fachhochschule München   Fachbereich 03 FA   SS 03

Diplomvorprüfung in Mathematik - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Plöchinger, Pöschl, Stiefenhofer

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: (Bogenlänge, MacLaurin, Kepler-Faßregel) Zu einer positiven Konstanten c sei $\mathcal{P}$ die Parabel mit der Gleichung $y = p(x) = \frac{c}{2}x^2$ für $-1 \le x \le 1$. Zeigen Sie, daß

a) $\mathcal{P}$ die *Bogenlänge* $L = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ hat mit $f(x) = \sqrt{1+(cx)^2}$. Berechnen Sie dann

b) die Näherung Q von L mit der *Kepler-Faßregel*,

c) das *MacLaurin-Polynom* $T_2(x)$ von $f(x)$ bis zum Term x^2, d) das Integral $M = \int_{-1}^{1} T_2(x)\,dx$.

Aufgabe 2: (Fläche, Höhenlinie, Tangentialebene, Volumen) Die Fläche $\mathcal{F}$ im Raum habe die Gleichung $z = f(x,y) = 9 - \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5}$. Ermitteln Sie

a) Gleichung, Art und Skizze der *Schnittkurve* von $\mathcal{F}$ mit der Ebene $x = 1$,
b) Gleichung, Art und Skizze der *Höhenlinie* der Höhe $z = c$,
c) das *Volumen* V des Körpers, der von $\mathcal{F}$ und von den Ebenen $z = 6$ und $z = 9$ begrenzt ist.

Aufgabe 3: (Extremum von $f(x,y)$) Ein Quader mit den positiven Kantenlängen x, y und z in cm habe das Volumen $V = 1000\ \text{cm}^3$ und den Oberflächeninhalt A in cm^2.

a) Begründen Sie die Formel $A = f(x,y) = 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right)$.
b) Für welche Werte von x, y, und z hat A ein *Extremum*?
c) Von welcher *Art* ist das Extremum?

Aufgabe 4: (nichtlineare DGL 2. Ordnung, Anfangswertproblem) Sei y die Lösung der DGL $y'' = f(y,y') = \frac{8\,y}{(y')^2}$ mit den Anfangswerten $y = 1$ und $y' = 2$ bei $x = 0$.

a) Zeigen Sie, daß für die *Ableitung* $v = y'$ von y gilt $v = 2\sqrt{y}$,
b) berechnen Sie die *Lösung* y.

Aufgabe 5: (RK-Verfahren) Ermitteln Sie zur DGL $y' = \frac{y}{1+x^2}$

a) die *allgemeine Lösung* y, b) die *spezielle Lösung* mit $y = 2$ bei $x = 0$ und hiervon
c) den *Wert* $y(x = 1)$ c1) exakt und c2) näherungsweise mit dem *Runge-Kutta Verfahren* bei der Schrittweite $h = 1$.

Wo haben sich Fehler eingeschlichen? Mit freundlichen Grüßen E. P.

A1

Parabel $\mathcal{P}$: $\boxed{y = p(x) = \frac{c}{2}x^2}$ $-1 \le x \le 1$

a): $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(cx)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

b): $Q = \frac{2}{6} \cdot \left[f(-1) + 4 \cdot f(0) + f(1)\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{1+c^2} + 2\right]$ //

c): mit $h = (cx)^2$ ist

$f(x) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} = 1 + \frac{c^2x^2}{2} = T_2(x)$ //

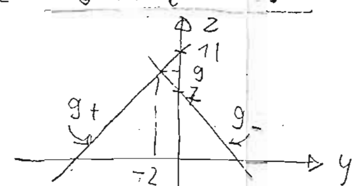
d): $M = \int_{-1}^{1} T_2(x)\,dx = \left[x + \frac{c^2x^3}{6}\right]_{x=-1}^{1} = 2 \cdot \left[1 + \frac{c^2}{6}\right]$ //

A2

Fläche $\mathcal{F}$: $\boxed{z = f(x,y) = 9 - \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 4y + \underbrace{5}_{=1+4}} \stackrel{!}{=} 9 - \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}$

a): $\mathcal{F} \cap \{x = 1\}$: $z = 9 - \sqrt{y^2 + 4y + 4} = 9 - |y+2|$

$= 9 \pm (y+2)$ $\hat{=}$ 2 Geraden $g_\pm$



b): $z = c$ $\Leftrightarrow$ $M(1,-2)$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 9 - c$ $\hat{=}$ Kreis um

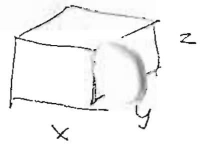
mit Radius $r = 9 - c$

c): in Höhe $z = c$ QF-Inhalt $q(c) = \pi \cdot (9-c)^2$

$\Rightarrow V = \pi \cdot \int_6^9 (c-9)^2\,dc = \pi \cdot \left[\frac{(c-9)^3}{3}\right]_{c=6}^{9} = \pi \cdot 9$ //

A3

a): $V = 1000 = x\cdot y\cdot z$



$A = 2\,(xy + yz + xz)$

$= 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right) = f(x,y)$

b): $f_x = 2\cdot\left(y - \frac{V}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow V = y\cdot x^2$

$f_y = 2\cdot\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0 \Rightarrow V = x\cdot y^2$

$\cdot\frac{1}{x\cdot y} \Rightarrow \underline{x = y} \Rightarrow V = x^3 \Rightarrow \underline{x_0 = 10 = y_0 \Rightarrow z_0 = 10}$ Würfel

c): $f_{xx} = 4\cdot\frac{V}{x^3} = 4,\ f_{xy} = 2,\ f_{yy} = 4\frac{V}{y^3} = 4$

$\Rightarrow \Delta := f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 16 - 4 = 12 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

A4

AWP: $\boxed{y'' = f(y,y') = \frac{8\cdot y}{(y')^2}}\ \boxed{\begin{matrix} y = 1 \\ y' = 2 \end{matrix}}$ bei $\underline{x = 0}$

a): $\underline{v := y'} \Rightarrow \frac{dv}{dy}\cdot v = y'' = \frac{8\cdot y}{v^2} \xRightarrow{\text{trennen}}$

$v^3\,dv = 8\cdot y\,dy \xRightarrow{\int} \frac{v^4}{4} = 4y^2 + C \Rightarrow$

$\underline{v = \pm\sqrt[4]{4\cdot(4y^2 + C)}}$ AB: $2 = \pm\sqrt[4]{4(4+C)}$

$\Rightarrow C = 0$ und $+\sqrt{\ }$ $\Rightarrow v = 2\sqrt{y}$ //

b): $\frac{dy}{dx} = v = 2\cdot\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \xRightarrow{\int}$

$\sqrt{y} = x + K \Rightarrow \underline{y = (x+K)^2}$ AB:

$1 = 0 + K \Rightarrow y = (x+1)^2$ //

A5

$\boxed{y' = \frac{y}{1+x^2}} = f(x,y)$

a): $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2} \xRightarrow{\text{trennen}} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \xRightarrow{\int}$

$\ln y = \operatorname{atg} x + K \Rightarrow \underline{\underline{y = C\cdot e^{\operatorname{atg} x}}}$

b): $\underline{y = 2}$ bei $x = 0 \Rightarrow 2 = C\cdot e^0 \Rightarrow \underline{C = 2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 2\cdot e^{\operatorname{atg} x}}}$

c1): $y(x=1) = 2\cdot e^{\operatorname{atg} 1} = 2\cdot e^{\pi/4} = \underline{\underline{4{,}38656\ldots}}$

c2): $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\cdot\left[k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right]$

$(x_0, y_0) = (0,2)$, $h = 1$, $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$

1· $k_1 = f(x_0, y_0) = \underline{2}$

2· $k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{3}{5/4} = \frac{12}{5} = \underline{2{,}4}$

2· $k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\cdot k_2\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{16}{5}\right) = \frac{16/5}{5/4} = \frac{64}{25} = \underline{2{,}56}$

1· $k_4 = f\left(x_0 + h, y_0 + h\cdot k_3\right) = f\left(1, \frac{114}{25}\right) = \frac{114/25}{2} = \frac{114}{50} = \underline{2{,}28}$

$\Rightarrow y_1 = 2 + \frac{1}{6}\cdot\left[2 + 2\left(\frac{12}{5} + \frac{64}{25}\right) + \frac{114}{50}\right]$

$= 2 + \frac{100 + 2\cdot(120 + 128) + 114}{6\cdot 50}$

$= 2 + \frac{214 + 2\cdot 248}{300} = 2 + \frac{710}{300} = \underline{\underline{4{,}366\ldots}}$