134

Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2004**

Diplomvorprüfung in Mathematik II (Analysis) – Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Warendorf

WICHTIG :

Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Alle Prüfungsteilnehmer bearbeiten die Aufgaben 1-6.
Alle Studenten, die den Maple Kurs besucht haben, bearbeiten die Aufgabe 7_1 (Maple)
Alle anderen Studenten (ohne Maple Kurs) bearbeiten die Aufgabe 7_2 (Numerische Integration)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (/ 71)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Parameterdarstellung, Kurvenlänge, Sektorfläche, max = 15 Punkte)
(Aufgabenstellerin: Dr. Kloster)

Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Asteroide (siehe Zeichnung):

$x = 5r\cos(t) + r\cos(5t)$, $y = 5r\sin(t) - r\sin(5t)$ mit $t \in [\,0, 2\pi\,[$.

Platz für die Zeichnung

a) Berechnen Sie den Umfang der Kurve (also ihre Länge vom $t = 0$ bis $t = 2\pi$). (/5)

Anleitung: - Berechnen Sie die Länge des Bogens von A nach B. Die Gesamtlänge Ist dann ein geeignetes Vielfaches dieses Wertes.

~~- Verwenden Sie an geeigneter Stelle das Additionstheorem des Cosinus.~~

- Benutzen Sie die Formel $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ an geeigneter Stelle.

$\dot{x} = -5r\,(\sin(t) + \sin(5t))$ 1/2

$\dot{y} = 5r\,(\cos(t) - \cos(5t))$ 1/2

$\frac{u}{6} = \int_{t=0}^{t=\pi/3} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

$$\dot x^2+\dot y^2 = 25r^2\left[\sin^2(t)+2\sin(t)\sin(5t)+\sin^2(5t)+\cos^2(t)-2\cos(t)\cos(5t)+\cos^2(5t)\right]$$

$$= 25r^2\left[1 + 2(\sin(t)\sin(5t)-\cos(t)\cos(5t)+1\right]$$ (133)

$$= 25r^2\left[2+2(-\cos(6t)\right] = 50r^2(1-1+2\sin^2(3t))$$

$$= 100\, r^2 \sin^2(3t).$$ 2

angegebene Formel benutzen! mit $\alpha = 3t$

$$\frac{U}{6} = \int_{t=0}^{t=\pi/3}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt = \int_0^{\pi/3}\sqrt{100r^2\sin^2(3t)}\,dt = \int_0^{\pi/3}10r\sin(3t)\,dt$$ 1

$$= 10r\left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^{\pi/3} = 10r\left(\frac{1-(-1)}{3}\right) = \frac{20}{3}r$$

$$U = 6\cdot\frac{20}{3}r = \underline{\underline{40r}}$$ 1

b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Inneren der Asteroide. (/5)

Anleitung: - Berechnen Sie dazu die Fläche des Sektors von OAB. Die Gesamtfläche ist dann ein geeignetes Vielfaches dieses Wertes.

- Benutzen Sie das Additionstheorem des cosinus an geeigneter Stelle!

~~- Benutzen Sie die Formel $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$ an geeigneter Stelle.~~

$$\frac{F}{6} = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=\pi/3}(x\dot y - y\dot x)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\Big[(5r\cos(t)+r\cos(5t))\cdot(5r\cos(t)-5r\cos(5t))$$ 1

$$-(5r\sin(t)-r\sin(5t))(-5r\sin(t)-5r\sin(5t))\Big]dt =$$ 1

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\Big[25r^2\cos^2(t)-5r^2\cos^2(5t)-25r^2\cos(t)\cos(5t)+5r^2\cos(t)\cos(5t)$$ 1

$$+25r^2\sin^2(t)-5r^2\sin^2(5t)+25r^2\sin(t)\sin(5t)-5r^2\sin(t)\sin(5t)\Big]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}25r^2-5r^2-20r^2\cos(t)\cos(5t)+20r^2\sin(t)\sin(5t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}20r^2\big(1+\underbrace{\sin(t)\sin(5t)-\cos(t)\cos(5t)}_{\text{Additionstheorem des cosinus} \Rightarrow -\cos(6t)}\big)\,dt = \frac{20r^2}{2}\int_0^{\pi/3}(1-\cos(6t))\,dt$$ 1

(131)

b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_1, b_2. (/5)

(1) Da die Funktion ungerade ist, ist $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(x)\,dx \overset{(1)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \underset{v}{x}\cdot\underset{u'}{\sin(x)}\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\sin(x)\,dx$$

partielle Integration

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\cos(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi}\left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2} + 1$$

$$= \frac{2}{\pi} + 1 \quad (1)$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2x)\,dx \overset{(1)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \underset{v}{x}\,\underset{u'}{\sin(2x)}\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin(2x)\,dx$$

partielle Integration

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[-\cos(2x)\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\cdot\frac{\pi}{2}\right] + \underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos(2\pi)}_{+1} - \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Alternativ: b_k allgemein berechnen! Punkte dort dann entsprechend doppelt!

c) Geben Sie das Fourierpolynom F2(x) 2. Grades (d.h., den Teil der Fourierreihe bis einschließlich zu den Koeffizienten a2 und b2) (/2)
und das Fourierpolynom F1(x) 1. Grades (d.h., den Teil der Fourierreihe bis einschließlich zu den Koeffizienten a1 und b1) an.

$$F_2(x) = \left(\frac{2}{\pi}+1\right)\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) \quad (1)$$

$$F_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}+1\right)\sin(x) = 1.63662\cdot\sin(x) \quad (1)$$

d) Zeichnen Sie das Fourierpolynom 1. Grades in obiges Koordinatensystem ein! (/2)

132

$$F = 6 \cdot \frac{10}{3} r^2 \pi = 20 r^2 \pi \quad (1)$$

c) Den Krümmungsradius bei $t = \frac{\pi}{2}$ (/5)

$$\ddot{x} = -5r\cos(t) \, (\pm) \, 25r\cos(5t) \quad (1/2)$$

$$\ddot{y} = -5r\sin(t) + 25r\sin(5t) \quad (1/2)$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5r\Big(1 + \underbrace{\sin\tfrac{5}{2}\pi}_{=1}\Big) = -10r \quad (1/2)$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (1/2)$$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (1/2)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5r + 25r = 20r \quad (1/2)$$

$$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} \; (1) = \frac{-10r \cdot 20r - 0 \cdot 0}{(10r\,\underbrace{\sin(3\cdot\frac{\pi}{2})}_{1})^3} = \frac{-200}{1000}\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{5r}$$

$$\text{Krümmungsradius} \quad \rho = \left|\frac{1}{\varkappa}\right| = 5r \quad (1)$$

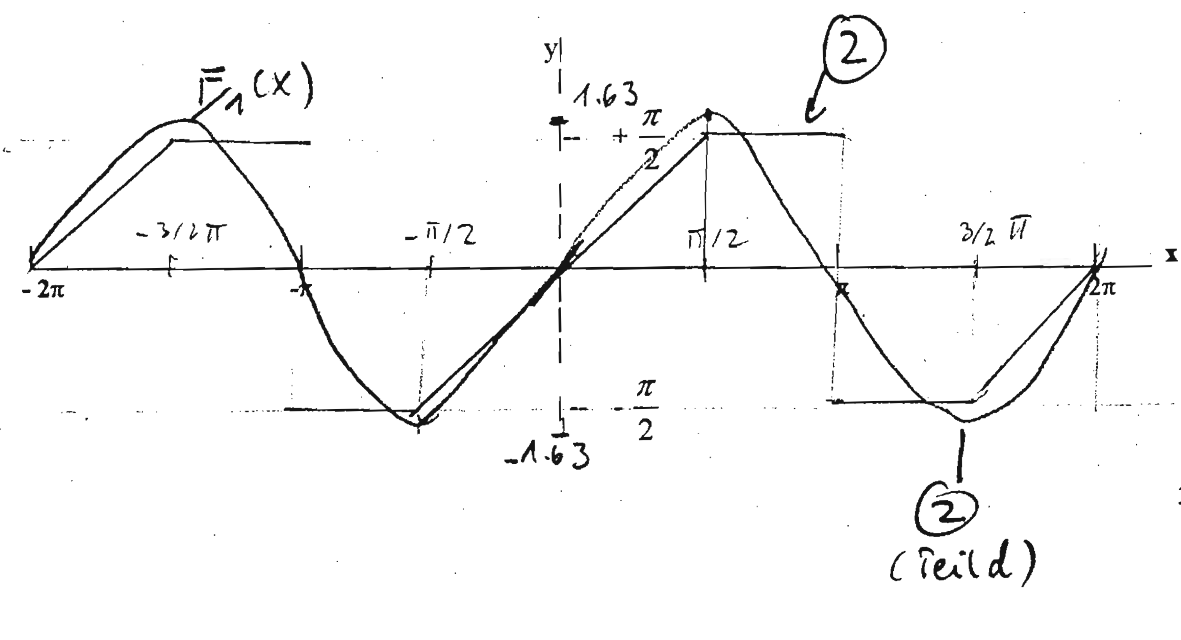
Aufgabe 2 : (Fourierkoeffizienten, Fourierpolynom, max = 11 Punkte)
(Aufgabenstellerin: Dr.Warendorf)

Durch $y = -\frac{\pi}{2}$ für $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[$,

$y = x$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$y = \frac{\pi}{2}$ für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ sei eine (ungerade) Funktion mit der Periode 2π definiert.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi[$ (/2)



130

Aufgabe 3 : (Funktion von zwei Variablen, Extremwerte, max = 8 Punkte)
(Aufgabenstellerin Dr. Kloster)

Die Fläche F1 habe die Gleichung:

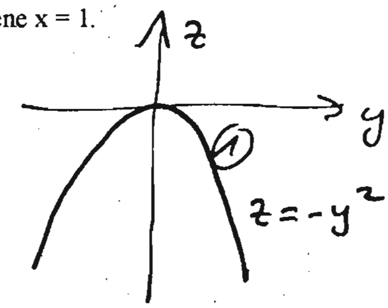
$z = f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2$.

a) Ermitteln und zeichnen Sie die Schnittkurve mit der Ebene x = 1. (/2)

$x = 1 \Rightarrow z = 1 - 1 - y^2$ (1)

$\Rightarrow z = -y^2$

Normalparabel, nach unten geöffnet.



b) Ermitteln Sie alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, in denen Extremwerte oder Sattelpunkte auftreten. (/3)
Berechnen Sie bei eventuellen Extremwerten, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

$z_x = 3x^2 - 2x \qquad z_x = 0$ für $x = 0$ oder $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (1/2)

$z_y = -2y \qquad z_y = 0$ " $y = 0$ (1/2)

$z_{xx} = 6x - 2 \qquad \Delta = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2$ (1/2)

$z_{xy} = z_{yx} = 0 \qquad \Delta(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Extremwert, wegen $z_{yy} < 0$ MAX (1/2)

$z_{yy} = -2 \qquad \Delta(0,\frac{2}{3}) = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt (1)

$(\frac{2}{3}, 0)$

c) berechnen Sie die Tangentialebene an die Fläche im Punkt Q =(2,1). (/3)

$z - z_0 = (x - x_0) z_x + (y - y_0) z_y$ (1/2)

$z_0 = f(2,1) = 2^3 - 2^2 - 1 = 8 - 4 - 1 = \underline{\underline{3}}$ (1/2)

$z_x(2,1) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$ (1/2)

$z_y(2,1) = -2$ (1/2)

$z = 8x - 2y - 16 + 3 + 2$

$\underline{\underline{z = 8x - 2y - 11}}$ (1)

129

Aufgabe 4: (Gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung, max = 9 Punkte)
Aufgabenstellerin: Dr. Warendorf

Ermitteln Sie für die DGL $y' + xy = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ $= x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

a) Um was für einen Typ von Differentialgleichung handelt es sich? (/1)

Gewöhnliche lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung y der homogenen DGL . (/3)

$$y' = -xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = -x \;(1)\; \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \tilde{C} \;(1)$$

$$y_H = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \;(1)$$

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten. (/3)

Ansatz $y_{allg} = C(x)\, e^{-x^2/2}$, wir schreiben wieder y statt y_{allg}:

$$y' = C'(x)\, e^{-x^2/2} - x \cdot C(x)\, e^{-x^2/2} \;(1)$$

eingesetzt in die inhomogene DGL:

$$C'(x)\, e^{-x^2/2} \cancel{- x \cdot C(x)\, e^{-x^2/2}} \cancel{+ x \cdot C(x)\, e^{-x^2/2}} = x \cdot e^{-x^2/2} \;(1)$$

$$C'(x) = x \Rightarrow C(x) \overset{(1/2)}{=} \frac{x^2}{2} + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

$$y_{allg} = K e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2/2} \;(1/2)$$

d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingung y(0) = 1 erfüllt. (/2)

$$1 = K \cdot e^0 + 0 \Rightarrow K = 1 \;(1)$$

$$y_{spez} = e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2/2} \;(1)$$

128

Aufgabe 5: (Lineare inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, max = 11 Punkte)
Aufgabenstellerin: Dr. Warendorf

Gegeben ist die DGL y'' + 5y' + 6y = x. Gesucht ist:

a) Die allgemeine Lösung der DGL (/8)

7

homogene DGL $y'' + 5y' + 6y = 0$

charakteristisches Polynom $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 1

$$\lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_1 = -2$$ 1

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$ 1

Ansatz: $y_p = Ax + B \qquad y_p' = A, \quad y_p'' = 0$ 1

in DGL eingesetzt: $0 + 5A + 6Ax + 6B = x$ 1

Koeffizientenvergleich: $x^1: 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$ 1

$x^0: 5A + 6B = 0 \Rightarrow B = -\frac{5}{6}A = -\frac{5}{36}$ 1

also $y_p = \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$, $y_{allg} = y_H + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$ 1

b) Die spezielle Lösung, die durch die Anfangsbedingungen $y(0) = -\frac{5}{36}$, $y'(0) = 0$ (/3)

festgelegt ist.

$y(0) = -\frac{5}{36} \Rightarrow -\frac{5}{36} = C_1 + C_2 - \frac{5}{36} \Rightarrow C_1 = -C_2$ 1

$y'(0) = 0 \Rightarrow -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 2C_2 - 3C_2 = -\frac{1}{6}, \; C_2 = +\frac{1}{6}$ 1

$C_1 = -\frac{1}{6}$

$$y_{spez} = -\frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$$ 1

Aufgabe 6: (komplexe Zahlen, max = 9 Punkte)
Aufgabensteller Dr. Pöschl

a)Bringen Sie die komplexe Zahl: (/2)

$$\frac{(1+i)^3}{2-i}$$ auf die Normalform a + ib,
(d.h. bestimmen Sie a und b)

1

$$\frac{(1+i)^3}{2-i} = \frac{1 + 3\cdot 1^2 \cdot i + 3\cdot 1 \cdot i^2 + i^3}{2-i} = \frac{-2+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} =$$

$$\frac{1}{5}(-4 - 2i + 4i + 2i^2) = \frac{1}{5}(-6 + 2i) = \underline{\underline{-\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i}}$$

1

b)Bringen Sie die komplexe Zahl: (numerisch, bitte 5 Nachkommastellen angeben) (/4) 127

$\sqrt{i+1}$ auf die Normalform a + ib,
(d.h. bestimmen Sie a und b) ,

1

$\sqrt{i+1} = a+ib \Rightarrow i+1 = a^2+2iab-b^2 \Rightarrow$

$a^2-b^2=1$ 1 $\Big\{ a^2 - \frac{1}{4a^2} = 1 \Rightarrow a^4-a^2-\frac{1}{4}=0$

und $2ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2a}$ 1

Substitution $u=a^2 \Rightarrow u^2-u-\frac{1}{4}=0$ $u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1/4)}}{2}$

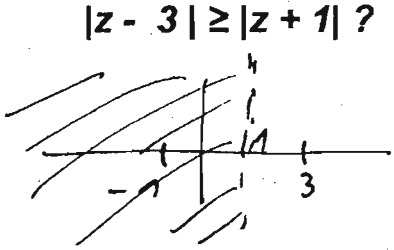
$u_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$ scheidet aus $\Rightarrow a = \pm\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $b = \pm\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ 1

numerisch $a = 1.098684113$, $b = 0.455089856$

c) Welche Teilmenge der komplexen Ebene beschreibt die Ungleichung: (/2)

$|z - 3| \geq |z + 1|$?

Lösung a) geometrisch: 2 Alle Punkte die von 3 weiter entfernt sind als von $x=-1$ $\Rightarrow \{z \mid Re(z) \leq 1\}$



b) rechnerisch 1
$|a+ib-3| \geq |a+ib+1| \Rightarrow (a-3)^2 \geq (a+1)^2$
$\Rightarrow a^2-6a+9 \geq a^2+2a+1 \Rightarrow 8 \geq 8a \Rightarrow 1 \geq a$
$\mathcal{L} = $ s.o. 1

Aufgabe 6_1 : (Maple) Nur für Studenten, die den Maple Kurs besucht haben, d.h. alle Studenten, die jetzt im 4.Fachsemester sind. Max = 8 Punkte.
Aufgabensteller: Dr. Pöschl

Gegeben sei die Funktion y = f(x) = cosh(x) (cosinus hyperbolicus)

a) Welcher Maple Befehl berechn et die erste Ableitung y'(x) der Funktion nach x? (/2)

```
y := cosh(x);        1
ys := diff(y,x)      1
```

b) Welche MAPLE Befehle berechnet y'($\frac{1}{2}$) ? (/2)

```
subs(x=1/2, ys);     2
```

c) Geben Sie den MAPLE Befehl an, der die Funktion y = cosh(x) in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt x=2 bis zum Glied $(x-2)^3$ (Restglied $O(x-2)^4$) entwickelt! (/2)

```
ty := taylor(y, x=2, 4);     2
```

(126)

d) Geben Sie den Maplebefehl zur Berechnung von $\int_0^3 f(x)dx$ an! (/2)

Integral = int(y, x= 0..3) (1)

evalf(%) oder

evalf(Integral) (1)

Aufgabe 6_2 : (Numerische Integration, max = 8 Punkte) für alle Studenten, die keinen Maple Kurs besucht haben.
Aufgabensteller Dr. Pöschl

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ $x \in [0,2]$.

Man berechne das Integral $\int_0^2 f(x)dx$ auf zweierlei Arten:

a) exakt (Bitte mindestens 5 Nachkommastellen angeben) (/2)

$$\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2) = \ln(5) = 1.609437912$$

b) numerisch nach der Simpson - Regel (Schrittweite h = $\frac{1}{2}$) (/6)

Geben Sie mindestens 5 Nachkommastellen an!

$$y_0 = f(0) = 0$$

$$y_1 = f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$y_2 = f(1) = 1$$

$$y_3 = f(\tfrac{3}{2}) = \frac{3}{1+\frac{9}{4}} = \frac{3}{\frac{13}{4}} = \frac{12}{13} = 0.923076923$$

$$y_4 = f(2) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) = \frac{1}{6}(0+4\cdot 0{,}8+2+4\cdot 0{,}923076923+0.8)$$

$$\frac{1}{6}(3.2+2+3.692307692+0.8) = 1.615384605$$