FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 05

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Kloster, Pöschl, Selting, Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!**

Alle Studenten, die den Maple-Kurs besucht haben, bearbeiten Aufgabe 6. Also insbesondere alle Studenten, die jetzt im 2. Studiensemester sind.
Alle anderen Studenten (ohne Maple-Kurs) bearbeiten Aufgabe 7

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \frac{-2x}{16-x^2}y = 16 - x^2.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$y_h' + \frac{2x}{16-x^2} y_h = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -\frac{2x}{16-x^2} y_h$

Trennung d. Var.: $\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \frac{2x}{16-x^2}\,dx$

$\Rightarrow \ln|y_h| = \ln|16-x^2| + \ln|K| \Rightarrow y_h = K \cdot (16-x^2)$

3

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung.

Variation d. Konstanten:

$y = K(x)(16-x^2)$

$y' = K'(x)(16-x^2) + K(x)(-2x)$

Einsetzen:

$K'(x)(16-x^2) - 2K(x)x + \frac{2x}{16-x^2} \cdot K(x) \cdot (16-x)^2 = 16-x^2$

$\Rightarrow K'(x)(16-x^2) = 16-x^2$

$\Rightarrow K'(x) = 1$

$\Rightarrow K(x) = x + C$

$\Rightarrow y = (x+C)(16-x^2)$

5

SS05

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

$y = (x+C)(16-x^2)$

(c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = -4$

$y_p(0) = -4$

$\Rightarrow -4 = (0+C)(16-0^2)$

$\Rightarrow -4 = 16C$

$\Rightarrow C = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow y_p = (x - \frac{1}{4})(16-x^2)$

$= +16x - x^3 - 4 + \frac{1}{4}x^2 = -x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 16x - 4$

2

2. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C: x(t) = t - 3\cos(t), \quad y(t) = t^2 + 2\sin(t), \quad -1 \le t \le 1$$

(a) An welcher Stelle $(t_v, x(t_v), y(t_v))$ hat die Kurve C eine senkrechte Tangente $(-1 \le t_v \le 1)$?

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

senkrechte Tangente $\Rightarrow$ $y' \to \infty$ $\Rightarrow$ $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$

4

$\dot{x}(t) = 1 + 3\sin t$

$\dot{y}(t) = 2t + 2\cos t$

$\Rightarrow 1 + 3\sin t_v = 0 \Rightarrow \sin t_v = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{t_v = -0,3398}$

$\Rightarrow \dot{y}(t_v) \neq 0$

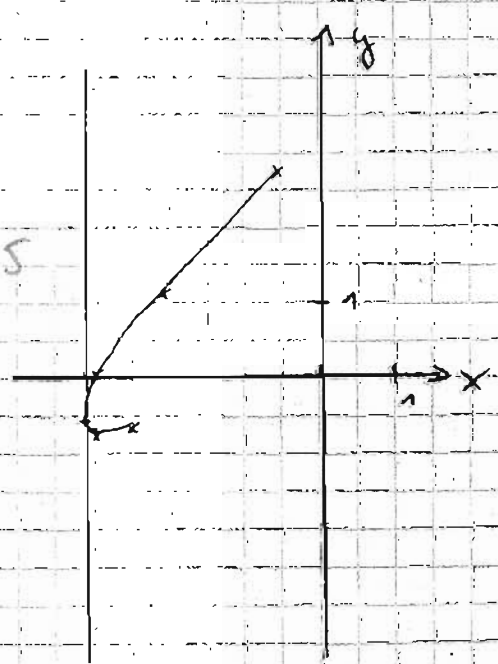
$\underline{x(t_v) = -3,1683}$, $\underline{y(t_v) = -0,5512}$

(b) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die gegebene Kurve für $t = -1; -0,5; 0; 0,5; 1$ und skizzieren Sie die Kurve und die senkrechte Tangente (1LE=1cm).

t	x	y
−1	−2,62	−0,68
−0,5	−3,13	−0,71
0	−3	0
0,5	−2,13	1,21
1	−0,62	2,68

2,5

1,5



3. Aufgabe: Taylor-Reihen (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

Bestimmen Sie die Glieder der Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) von $f(x)$ bis zur Potenz x^4.

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(x)}{4!}x^4$$

0,5 $f(0) = e^{\sin 0} = \underline{1}$

1 $f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

0,5 $f'(0) = 1 \cdot 1 = \underline{1}$

1 $f''(x) = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \, e^{\sin x}$

$= (\cos^2 x - \sin x)\, e^{\sin x}$

0,5 $f''(0) = 1 \cdot 1 = \underline{1}$

2 $f'''(x) = (2\cos x(-\sin x) - \cos x)\, e^{\sin x}$

$+ (\cos^2 x - \sin x) \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$

$= (-2\cos x \sin x - \cos x + \cos^3 x - \sin x \cos x) \cdot e^{\sin x}$

$= (\cos^3 x - 3\cos x \sin x - \cos x) \cdot e^{\sin x}$

0,5 $f'''(0) = (1 - 0 - 1) \cdot 1 = \underline{0}$

2 $f^{IV}(x) = (3\cos^2 x(-\sin x) + 3\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x)\, e^{\sin x}$

$+ (\cos^3 x - 3\cos x \sin x - \cos x) \cdot \cos x \, e^{\sin x}$

$= (-6\cos^2 x \sin x + 3\sin^2 x - 4\cos^2 x + \sin x + \cos^4 x)\, e^{\sin x}$

0,5 $f^{IV}(0) = (-0 + 0 - 4 + 0 + 1) \cdot 1 = -3$

1,5 $T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$

3. Aufgabe: Andere Lösungsweg

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$$

$\sin x$ in e^x einsetzen und bis zur Potenz x^4 ausmultiplizieren

$$\Rightarrow e^{\sin x} = 1 + \frac{x - \frac{x^3}{3!} \ldots}{1!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} \ldots)^2}{2!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} \ldots)^3}{3!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} \ldots)^4}{4!}$$

$$\Rightarrow T_4(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4$$

4. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ **ca. 14 Punkte**)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 4y.$$

(a) Welche Kurven ergeben sich als Schnitte mit den Ebenen

i. $x = 0$ (y,z-Ebene)

ii. $y = 0$ (x,z-Ebene)

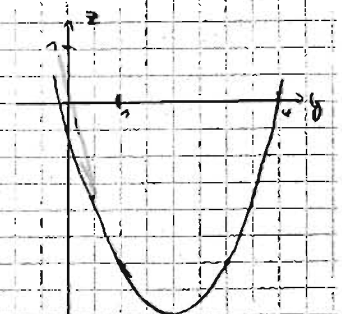
iii. $z = 0$ (x,y-Ebene)

Geben Sie jeweils den Typ der Kurve an und erstellen eine Skizze in der Schnittebene.

1 i) $z = y^2 - 4y$

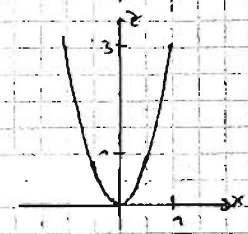
verschobene Normalparabel

mit $S(2,-4)$



1 ii) $z = 3x^2$

gestreckte Normalparabel



2 iii) $0 = 3x^2 + y^2 - 4y$ | quadr. Erg.

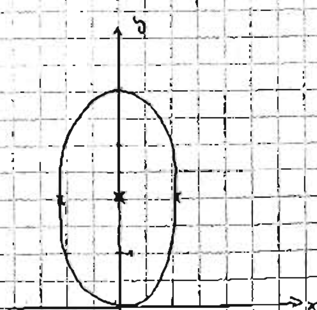
$\Rightarrow \; 4 = 3x^2 + (y-2)^2$

$\Rightarrow \; 1 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2$

verschobene Ellipse $M(0,2)$

mit Halbachsen $e = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}16$

$k = 2$



Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Geben Sie Art und Lage der Extremwerte an, soweit welche vorhanden sind. ($z = f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 4y$.)

$z_x = 6x$, $z_{xx} = 6$, $z_{xy} = 0$

$z_y = 2y - 4$ $z_{yy} = 2$

Extremwerte

4

$z_x = 0$ und $z_y = 0$

$6x_E = 0 \Rightarrow x_E = 0$

$2y_E - 4 = 0 \Rightarrow y_E = 2$

$\Delta = (z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2) \Rightarrow 12 > 0 \Rightarrow$ Extremwert

$z_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $T(0, 2, f(0,2))$

$\Rightarrow T(0, 2, -4)$

(c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten (z=0) von dem Normalbereich
1 ($B: ~~0~~ \le x \le \sqrt{2}, \quad 0 \le y \le 2 - x^2$) und oben von der gegebenen Fläche
($z = f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 4y$) begrenzt wird.
(Hinweis: es handelt sich um einen allgemeinen Zylinder.)

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} (3x^2 + y^2 - 4y)\, dy\, dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left[3x^2 y + \frac{1}{3} y^3 - 2y^2\right]_0^{2-x^2} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left[3x^2(2-x^2) + \frac{1}{3}(2-x^2)^3 - 2(2-x^2)^2\right] dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(6x^2 - 3x^4 + \frac{8}{3} - 4x^2 + 2x^4 - \frac{1}{3}x^6 - 8 + 8x^2 - 2x^4\right) dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3}x^6 - 3x^4 + 10x^2 - \frac{16}{3}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{21}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{16}{3}x\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{21}\sqrt{2}^7 - \frac{3}{5}\sqrt{2}^5 + \frac{10}{3}\sqrt{2}^3 - \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

$$+ \frac{1}{21} + \frac{3}{5} - \frac{10}{3} + \frac{16}{3}$$

6

$$= -\frac{152}{105}\sqrt{2} + \frac{287}{105}$$

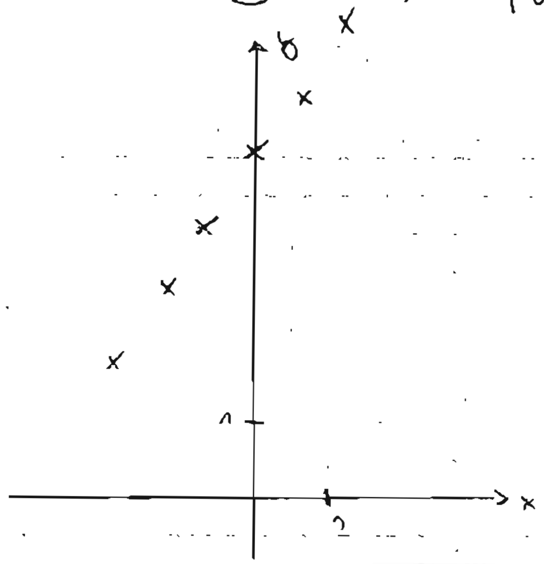
$$= 0{,}6004$$

5. **Aufgabe: Ausgleichskurve** (/ ca. 8 **Punkte**)

Bei einem Versuch wurden folgende Messungen gemacht. Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem (1LE=1cm) ein, entscheiden Sie sich, welche Ausgleichskurve geeignet ist und berechnen Sie sie.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1,8	1,75	3,24	-3,15
2	-1,2	2,76	1,44	-3,312
3	-0,6	3,57	0,36	-2,142
4	0	4,54	0	0
5	0,6	5,38	0,36	3,228
6	1,2	6,34	1,44	7,608
Σ	-1,8	+24,34	6,84	2,232

4



Ausgleichsgerade

1

$$a = \frac{6 \cdot 2{,}232 - (-1{,}8) \cdot \cancel{6{,}34}\ 24{,}34}{6 \cdot 6{,}84 - (-1{,}8)^2} = 1{,}513$$

1

$$b = \frac{\cancel{24{,}41}\ 6{,}84 \cdot 24{,}34 - 2{,}232 \cdot (-1{,}8)}{6 \cdot 6{,}84 - (-1{,}8)^2} = 4{,}511$$

1

$$g(x) = 1{,}513\,x + 4{,}511$$

1

6. **Aufgabe: Maple** (/ ca. 10 Punkte)
ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN

(a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Prozedur an, wenn sie mit `programm(10);` (s.u.) aufgerufen wird.

```
> programm:=proc(N)
>    local i;
>    for i from 1 to N
>    do
>      if (i mod 3 = 0) then
>        print(i^2)
>      end if
>    end do;
> end:
> programm(10);
```

9

36

81

3

Fortsetzung Aufgabe: Maple *ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN*

(b) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=1cm).

```
> f:=(x,y)->x*y;
```

f := (x, y) → xy

```
> fx:=D[1](f);
```

fx := (x, y) → y

```
> fy:=D[2](f);
```

fy := (x, y) → x

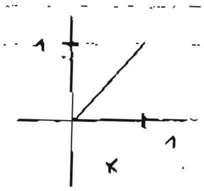
```
> fx(1,0);
```

0

```
> fy(1,0);
```

1

```
> plot(f(x,1),x=0..1);
```



3

(c) Geben Sie die Maple-Befehle zur Berechnung der Bogenlänge der ebenen Kurve aus Aufgabe 2 an ($C: x(t) = t - 3\cos(t), \quad y(t) = t^2 + 2\sin(t), \quad -1 \le t \le 1$).
Hinweis: Vergessen Sie nicht $x(t)$ und $y(t)$ zu definieren.

mit Funktionen

```
> x:= t -> t - 3*cos(t);
> y:= t -> t^2 + 2*sin(t);
> xp:= D(x);
> yp:= D(y);
> s:= int(sqrt(xp(t)^2 + yp(t)^2), t=-1..1);
> evalf(s);
```

mit Termen

```
> x:= t - 3*cos(t);
> y:= t^2 + 2*sin(t);
> xp:= diff(x,t);
> yp:= diff(y,t);
> s:= int(sqrt(xp^2 + yp^2), t=-1..1);
> evalf(s);
```

4

7. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung (/ ca. 10 Punkte) 11

ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE NICHT DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 3y' - 4y = 3xe^{-x}.$$

Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung und dann die spezielle Lösung unter den Anfangsbedingungen: $x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = 5, y'(x_0) = \frac{1}{10}$.

Lösung hom. DGL

char. Polynom: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ 1,5

$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

Partikuläre Lösung

Ansatzfunktion: $\alpha = -1$ ist einfache Lsg des char. Polynoms

1 $\Rightarrow y_p = x \cdot B_1(x) e^{-x} = x \cdot (b_1 x + b_0) e^{-x} = (b_1 x^2 + b_0 x) e^{-x}$

1 $y'_p = (2b_1 x + b_0) e^{-x} - (b_1 x^2 + b_0 x) e^{-x}$

$= (-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0) x + b_0) e^{-x}$

1 $y''_p = (-2b_1 x + 2b_1 - b_0) e^{-x} - (-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0) x + b_0) e^{-x}$

$= (b_1 x^2 + (-4b_1 + b_0) x + 2b_1 - 2b_0) e^{-x}$

Einsetzen in DGL:

$(b_1 x^2 + (-4b_1 + b_0) x + 2b_1 - 2b_0) e^{-x}$

1,5 $-3(-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0) x + b_0) e^{-x}$

$-4(b_1 x^2 + b_0 x) e^{-x} \quad = \quad 3x e^{-x}$

$(-10 b_1) x + 2b_1 - 5b_0 \quad = \quad 3x$

Koeffizientenvergleich:

$-10 b_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{3}{10}$ 1

$2b_1 - 5b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -\frac{3}{25}$

$\Rightarrow y_p = \left(-\frac{3}{10} x^2 - \frac{3}{25} x\right) e^{-x}$ 0,5

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{10} x^2 + \frac{3}{25} x\right) e^{-x}$ 0,5

Spezielle Lösung:

$y(0) = 5 \qquad y'(0) = \frac{1}{10}$

$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{5} x + \frac{3}{25}\right) e^{-x}$

$+ \left(\frac{3}{10} x^2 + \frac{3}{25} x\right) e^{-x}$

$\Rightarrow$ I $C_1 + C_2 = 5 \qquad \Rightarrow \quad C_2 = 5 - C_1$

II $4C_1 - C_2 - \frac{3}{25} = \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \quad 4C_1 - C_2 = \frac{11}{50}$

I in II

$\Rightarrow 4C_1 - 5 + C_1 = \frac{11}{50}$

$\Rightarrow 5C_1 = \frac{261}{50}$

$\Rightarrow C_1 = \frac{261}{250} = 1{,}044$

$\Rightarrow C_2 = 5 - \frac{261}{250} = \frac{989}{250} = 3{,}956$

$\Rightarrow y_s = \frac{261}{250} e^{4x} + \frac{989}{250} e^{-x} - \left(\frac{3}{10} x^2 + \frac{3}{25} x\right) e^{-x}$

3