FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 06

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Warendorf, Pöschl, Selting, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!**

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Lösungsblatt

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 13 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' - \frac{6y}{3x+1} = x.$$

(a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld (im 1. Quadranten) für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_h' - \frac{6y_h}{3x+1} = 0$ mit Hilfe von Isoklinen (für $c = 0, c = \frac{1}{2}, c = 1, c = 2$). 1LE = 1cm, $0 \leq x \leq 4$.

$$c = \frac{6y_h}{3x+1}$$

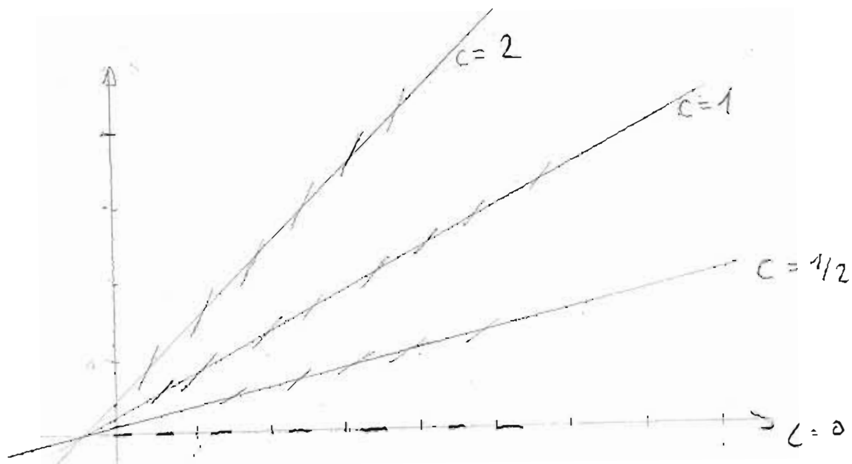
$$\Rightarrow y_h = \frac{c(3x+1)}{6}$$

$c = 0$: $y_h = 0$

$c = \frac{1}{2}$: $y_h = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$

$c = 1$: $y_h = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

$c = 2$: $y_h = x + \frac{1}{3}$



3

(b) Lösen sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

$$y_h' = \frac{6y_h}{3x+1}$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dy_h}{dx} = \frac{6y_h}{3x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y_h}\, dy_h = 6 \int \frac{1}{3x+1}\, dx$$

$$\Rightarrow \ln|y_h| - \ln|c| = 6 \cdot \frac{1}{3} \ln|3x+1|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y_h}{c}\right| = \ln(3x+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{y_h}{\pm c} = (3x+1)^2 \Rightarrow y_h = k(3x+1)^2$$

2

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

Variation der Konstanten:

$$y = K(x)\cdot(3x+1)^2 \Rightarrow y' = K'(x)(3x+1)^2 + K(x)\,2\cdot 3(3x+1)$$

Einsetzen.

$$K'(x)(3x+1)^2 + 6K(x)(3x+1) - \frac{6K(x)(3x+1)^2}{3x+1} = x$$

$$\Rightarrow K'(x)(3x+1)^2 = x$$

$$\Rightarrow K'(x) = \frac{x}{(3x+1)^2} \Rightarrow K(x) = \frac{1}{9(3x+1)} + \frac{1}{9}\ln|3x+1| + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{9}(3x+1) + \frac{1}{9}(3x+1)^2\ln|3x+1| + C\cdot(3x+1)^2$$

1

(d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung: $x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = \frac{1}{2}$.

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow y_{spez} = \frac{1}{9}(3x+1) + \frac{1}{9}(3x+1)^2\ln|3x+1| + \frac{7}{18}(3x+1)^2$$

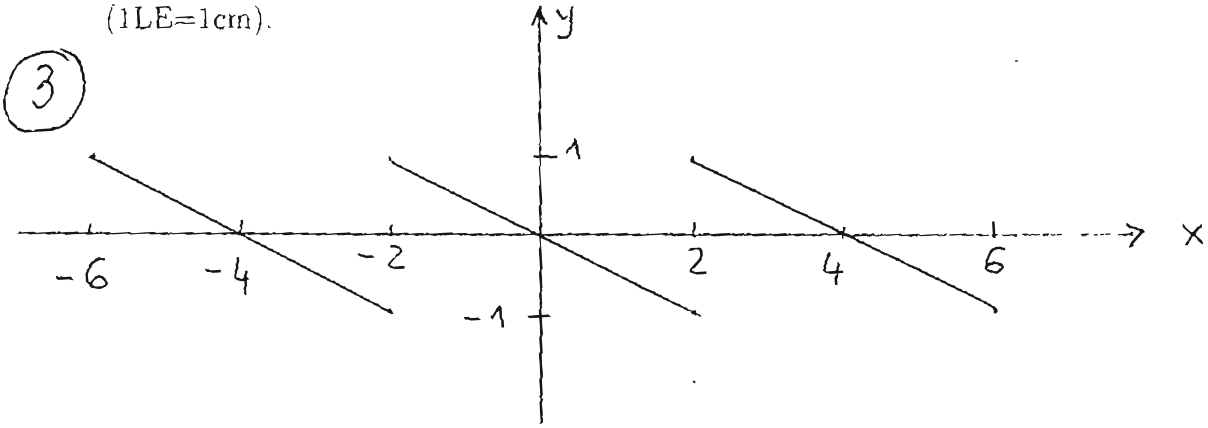
2. Aufgabe: Fourierreihen (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die folgende Funktion mit der Periode $T = 4$

$$f(t) = -\frac{t}{2}, \quad \text{für } -2 \leq t < 2, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-6, 6]$ und untersuchen Sie sie auf Symmetrie (1LE=1cm).

3



(b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

6

$$a_0 = 0 \qquad a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{T} \cdot t\right) dt \qquad \text{mit } T = 4 \text{ u. } f(t) = -\frac{t}{2}$$

$$b_k = -\frac{1}{2} \int_0^2 t \sin \frac{k\pi t}{2} \, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\frac{1}{2} k\pi t)}{(\frac{1}{2} k\pi)^2} - \frac{t \cdot \cos(\frac{k\pi t}{2})}{(\frac{k\pi}{2})} \right] \Bigg|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin k\pi}{(\frac{1}{2} k\pi)^2} - \frac{2 \cdot \cos k\pi}{\frac{k\pi}{2}} - \frac{\sin 0}{(\frac{1}{2} k\pi)^2} + \frac{0 \cdot \cos 0}{(\frac{k\pi}{2})} \right\}$$

$$= + \frac{2}{k\pi} \cos k\pi$$

Fortsetzung Aufgabe: Fourierreihen

$$b_k = \frac{2 \cdot (-1)^k}{k\pi}$$

$$b_1 = -\frac{2}{\pi} \qquad b_2 = +\frac{1}{\pi} \qquad b_3 = -\frac{2}{3\pi} \qquad b_4 = \frac{1}{2\pi}$$

$$b_5 = -\frac{2}{5\pi}$$

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 5. Glied an: $F_5(t)$.

2

$$F_5(t) = -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{\pi}\sin \pi t - \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) - \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi t}{2}\right)$$

$\frac{t}{2}$

$b_1 = -0,6366$

$b_2 = 0,3183$

$b_3 = -0,2122$

$b_4 = 0,1592$

$b_5 = -0,1273$

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 13 Punkte)
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

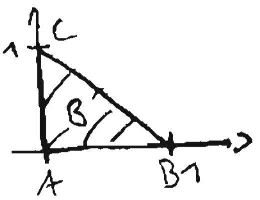
$$z = f(x, y) = x^2 + 2y + 3.$$

Der Bereich B sei ein Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten A(0,0), B(1,0) und C(0,1). B einschließlich der Ränder sei der Definitionsbereich der Funktion.

2 !

(a) Zeichnen Sie den Bereich B und geben Sie ihn in der Form:
$x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq g(x)$ an.

$$B: \; 0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq -x+1$$



(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers über B, der oben begrenzt wird durch $f(x, y)$.

$$V = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{-x+1} (x^2 + 2y + 3)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + y^2 + 3y \right]_0^{-x+1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + (1-x)^2 + 3(1-x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3 + 1 - 2x + x^2 + 3 - 3x) dx$$

$$= \int_0^1 (- x^3 + 2x^2 - 5x + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$= \frac{23}{12}$$

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(c) Wo liegt das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y)$ auf dem Bereich B? Anleitung: Wenn $f(x, y)$ im Inneren von B keinen Extremwert hat, so müssen die Extremwerte auf dem Rand liegen.

<u>E-Wert im Inneren</u>:

$$\left.\begin{array}{ll} f_x = 2x & \Rightarrow 2x_E = 0 \\ f_y = 2 & \Rightarrow 2 = 0 \ \lightning \end{array}\right\} \Rightarrow \text{kein E-Wert}$$

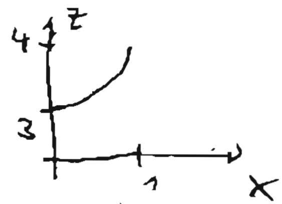
<u>E-Wert auf dem Rand</u>:

1. Rand AB: $y = 0$, $x \in [0, 1]$

$\Rightarrow z_{AB} = x^2 + 3$

Min bei $x = 0$, $z = 3$, $y = 0$

Max bei $x = 1$, $z = 4$, $y = 0$

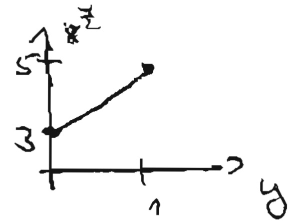


2. Rand AC: $x = 0$, $y \in [0, 1]$

$\Rightarrow z_{AC} = 2y + 3$

Min bei $y = 0$, $z = 3$, $x = 0$

Max bei $y = 1$, $z = 5$, $x = 0$



3. Rand BC: $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$

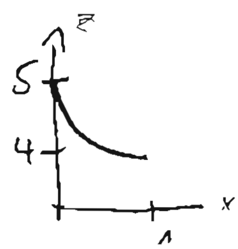
$\Rightarrow z_{BC} = x^2 + 2(1 - x) + 3$

$= x^2 - 2x + 5$

$z'_{BC} = 2x - 2 \Rightarrow$

Min bei $x = 1$, $z = 4$, $y = 0$

Max bei $x = 0$, $z = 5$, $y = 1$



Aus 1, 2, 3 folgt:

Max bei $(0, 1, 5)$, Min bei $(0, 0, 3)$

4. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 7 Punkte)

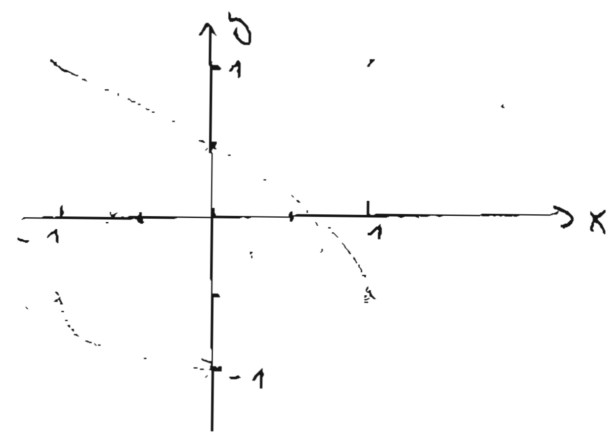
Gegeben ist die ebene Kurve

$$C: x(t) = \cos(3t), \quad y(t) = \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

4

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus und skizzieren Sie die Kurve (1LE=2cm).
Beachten Sie: In den Punkten $t = \frac{\pi}{6}$ und $t = \frac{5\pi}{6}$ hat die Kurve einen Doppelpunkt, sie schneidet sich dort selbst.

t	$x(t)$	$y(t)$
0	1	1
$\frac{\pi}{6}$	0	0,5
$\frac{\pi}{4}$	-0,7	0
$\frac{\pi}{3}$	-1	-0,5
$\frac{\pi}{2}$	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	1	-0,5
$\frac{3\pi}{4}$	0,7	0
$\frac{5\pi}{6}$	0	0,5
π	-1	1



(b) Berechnen Sie die Werte t, für die die Kurve im Inneren des Definitionsbereiches ($0 < t < \pi$) waagerechte und senkrechte Tangenten hat. Berechnen sie auch die zugehörigen x, y Werte.

$\dot{x}(t) = -3\sin(3t)$, $\dot{y}(t) = -2\sin(2t)$

senkrechte Tangente: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} \neq 0$

$\Rightarrow -3\sin(3t) = 0 \Rightarrow t_{s_1} = \pi/3 \Rightarrow P_{s_1} = (-1, -0{,}5)$

$t_{s_2} = 2/3\,\pi \quad P_{s_2} = (1, -0{,}5)$

waagerechte Tangente: $\dot{y} = 0$, $\dot{x} \neq 0$

$\Rightarrow -2\sin(2t) = 0 \Rightarrow t_w = \pi/2 \Rightarrow P_w = (0, -1)$

5. Aufgabe: Fehlerrechnung mit totalem Differential (/ ca. 7 Punkte)

Der Innendurchmesser D eines dünnen Rohres der Länge l kann wie folgt bestimmt werden. Das Rohr wird mit Quecksilber der Dichte ρ befüllt, die Masse m des benötigten Quecksilbers wird gewogen. Daraus kann dann der Durchmesser berechnet werden.

Folgende Werte werden gemessen:

- Dichte: $\rho_0 = 13,8\frac{g}{cm^3}$ mit einer Messungenauigkeit von $d\rho = \pm 0,8\frac{g}{cm^3}$.
- Masse: $m_0 = 55,4g$ mit einer Messungenauigkeit von $dm = \pm 0,5g$.
- Länge des Rohres: $l_0 = 74,2cm$ mit einer Messungenauigkeit von $dl = \pm 0,05cm$.

Der Durchmesser D berechnet sich nach der folgenden Formel

$$D = D(\rho, m, l) = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}}$$

(a) Berechnen Sie den Durchmesser D_0 mit den gemessenen Werten ρ_0, m_0 und l_0.

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 55,4}{\pi \cdot 13,8 \cdot 74,2}} \text{ cm} = 0,262$$

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von D nach ρ, nach m und nach l.

$$\frac{\partial D}{\partial m} = \frac{2}{\sqrt{\pi \rho l}} \cdot \frac{1}{2} m^{(-1/2)} = 0,00237 \quad 0,5$$

$$\frac{\partial D}{\partial \rho} = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{\pi l}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rho^{(-3/2)} = -0,00951 \quad 0,5$$

$$\frac{\partial D}{\partial l} = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{\pi \rho}} \left(-\frac{1}{2}\right) l^{(-3/2)} = -0,00177$$

(c) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler mit den oben gegebenen Messungenauigkeiten unter Verwendung des totalen Differentials.

$$dD_{MAX} = \underbrace{|0,00237 \cdot 0,5|}_{D_m} + \underbrace{|(-0,00951 \cdot 0,8|}_{D_\rho} + \underbrace{|(-0,00177) \cdot 0,05|}_{D_l}$$

$$= 0,00888$$

$$\text{Rel. Fehler: } \frac{0,00888}{0,262} = 0,0338 = 3,38\%$$

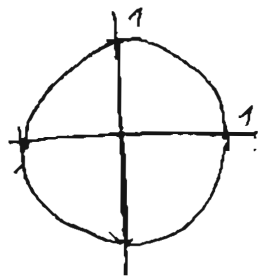
6. Aufgabe: Maple (/ ca. 9 Punkte)

(a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=2cm).

```
> f:=(x,y)->x^2+y^2;
```

$f := (x,y) \rightarrow x^2 + y^2$

```
> plots[implicitplot](f(x,y)=1,x=-1..1,y=-1..1);
```




```
> fx:=D[1](f);
```

$fx := (x,y) = 2x$

```
> fy:= D[2](f);
```

$fy := (x,y) = 2y$

(a) Geben Sie die Maple-Befehle zur Bestimmung der Taylorreihe bis zum Grad 4 (T_4) der Funktion $f(x) = sin(x)$ um den Punkt $x_0 = \pi$ an. Geben Sie anschliessend die Befehle zur Berechnung des Integrals über T_4 im Intervall $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ an. Das Ergebnis soll abschliessend als Dezimalzahl angezeigt werden.

```
> f := x -> sin(x);
```

$$f := x \rightarrow \sin(x)$$

```
> t4 := taylor(f(x),x=Pi,5);
```

$$t4 := -x - \pi + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + O\left((x-\pi)^5\right)$$

```
> T4:=convert(t4,polynom); #für das Integral braucht man nur einen Term, auf die Umwandlung in eine Funktion kann verzichtet werden.
```

$$T4 := -x + \pi + \frac{(x-\pi)^3}{6}$$

```
> int(T4,x=3/4*Pi..Pi);
```

$$-\frac{673\,\pi^4}{6144} + \frac{7\left(-1+\frac{\pi^2}{2}\right)\pi^2}{32} + \frac{\pi^2}{4}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.292570795$$