Lösung

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 07

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Pöschl, Kloster, Vielemeyer, Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Achtung
Fehler in Aufgabe 4
Ansage in der Prüfung
erforderlich!

5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0
0 - 20	20½ - 23	23½ - 27	27½ - 30	30½ - 33	33½ - 37	37½ - 40	40½ - 43	43½ - 47	47½ - 50	50½ - 60

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung** (/ ca. 11 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = y(2 + y^2).$$

Lösen sie die obige Differentialgleichung 2. Ordnung unter den Anfangsbedingungen $x_0 = 0, y(x_0) = 0$ und $y'(x_0) = \sqrt{2}$.

Hinweise:

(a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung vom Typ $y'' = f(y)$. Substituieren Sie $u = y'$ und fassen Sie u als Funktion von y auf.

(b) Schreiben Sie das sich ergebende Polynom 4. Grades in y in der Form $(a \cdot y^2 + b)^2$

a) $u = y'$ $\quad u\frac{du}{dy} = y''$ (1) $\Rightarrow$

$u\frac{du}{dy} = y(2+y^2)$ (1) $\Rightarrow \frac{u^2}{2} = y^2 + \frac{y^4}{4} + C$ (1)

AB $\Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 1$ (1)

$u^2 = \frac{y^4}{2} + 2y^2 + 2 = \left(\frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^2$ (2)

$u = y' = \pm \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ (1)

$\frac{y'}{\frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = \pm 1$ (1) $\quad \arctan\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm x + C$ (1)

$\frac{y}{\sqrt{2}} = \tan(\pm x + c) \quad y = \sqrt{2}\tan(\pm x + c)$ (1)

AB: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = 0$ (1) $\Rightarrow$

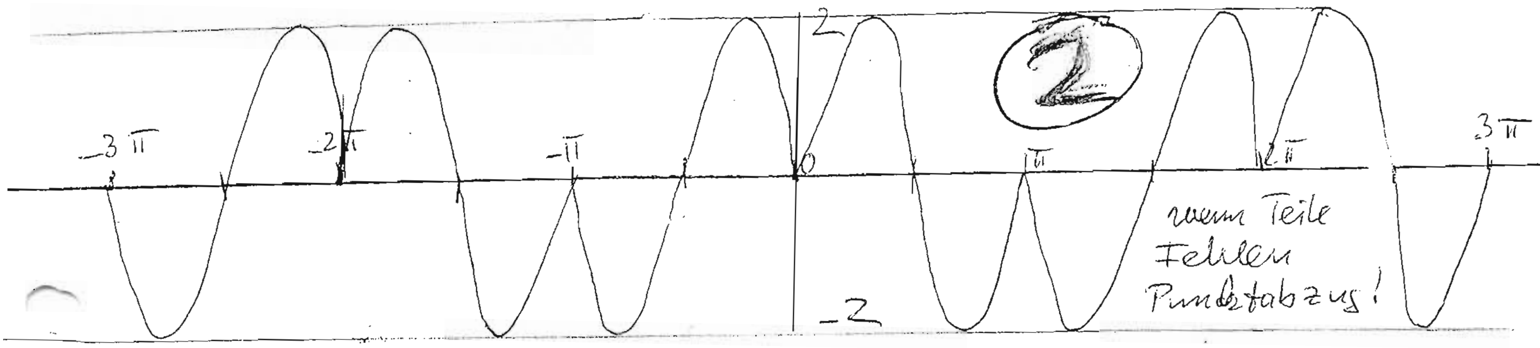
$y = \pm\sqrt{2}\tan(x)$ (1)

2. **Aufgabe: Fourierreihen** (/ ca. 14 Punkte)

Gegeben ist die folgende achsensymmetrische periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi$

$$f(t) = 2\sin(2t), \quad \text{für } 0 \leq t < \pi, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$ (1LE=0,5cm).



(b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

$b_n = 0$ für alle n, da Funktion achsensymmetrisch

fehlt: 1
im Fall $n=2$ ist eine andere Formel zu verwenden, auch hier folgt $a_2 = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(2x)\,dx = 0 \quad 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(2x)\cos(nx)\,dx \overset{\text{FS trigon. Funktionen oder Integrale}}{=} \quad 2$$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2-n)x + \frac{1}{2}\sin(2+n)x\right]dx = \quad 1$$

$$\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos(2-n)x}{2(2-n)} - \frac{\cos(2+n)x}{2(2+n)}\right]_0^{\pi} = \quad 1$$

$$2 \quad \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\cos(2-n)\pi}{2(2-n)} + \frac{1}{2(2-n)} - \frac{\cos(2+n)\pi}{2(2+n)} + \frac{1}{2(2+n)}\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{2(2-n)} + \dfrac{1}{2(2-n)} - \dfrac{1}{2(2+n)} + \dfrac{1}{2(2+n)} = 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2-n} + \dfrac{1}{2+n}\right) = \dfrac{16}{\pi(4-n^2)} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad 2$$

4

$a_1 = \frac{16}{3\pi}$

$a_3 = -\frac{16}{5\pi}$

-16

$a_2 = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = 0$

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 5. Glied an: $F_5(t)$.

$$f_5(t) = \frac{16}{3\pi}\cos(t) - \frac{16}{5\pi}\cos(3t) - \frac{16}{21\pi}\cos(5t)$$

2

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 9 Punkte)

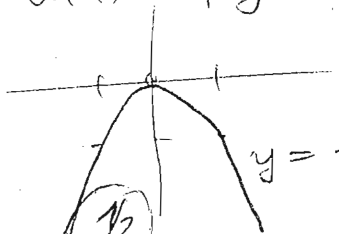
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \ln(x^2 + y + 1).$$

(a) Berechnen und zeichnen (1LE =1cm) Sie die Höhenlinien $f(x, y) = c$ für $c = 0$ und $c = \ln(0, 5)$.

$\ln(x^2 + y + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + y + 1 = 1$

$y = -x^2$ Parabel



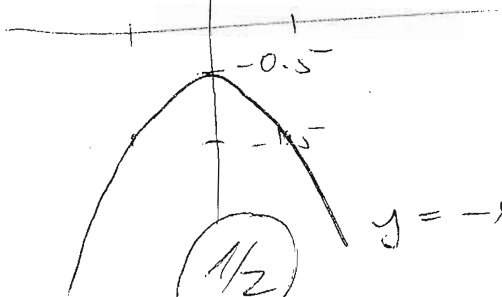
1/2

1/2

$\ln(x^2 + y + 1) = \ln(0.5) \Rightarrow x^2 + y + 1 = 0.5$

$y = -0.5 - x^2$

Parabel 1/2



1/2

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

$$z_x = \frac{1}{x^2 + y + 1} \cdot 2x$$ 1

$$z_{xx} = \frac{2 \cdot (x^2 + y + 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 + y + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y + 2}{(x^2 + y + 1)^2}$$ 1

$$z_{xy} = -\frac{2x}{(x^2 + y + 1)^2} = z_{yx}$$ 2

$$z_y = \frac{\cancel{11}\ +1}{(x^2 + y + 1)^{\cancel{2}}}$$ 1

$$z_{yy} = \frac{-1}{(x^2 + y + 1)^2}$$ 1

$$\boxed{z_y = \frac{1}{x^2 + y + 1}}$$

(c) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte.

$z_x = 0 \implies x = 0$ 1/2

$z_y = 0$ nicht möglich 1/2

Es gibt keine Extremwerte oder Sattelpunkte 1

Achtung Aussage in Prüfung erforderlich!

4. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 8 Punkte)

Vorgabe falsch $0 < t < \pi$ muss es heißen

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C : x(t) = \ln(t), \quad y(t) = \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

f

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus .

t	$x(t)$	$y(t)$
0,1	-2.30	0.980
$\frac{\pi}{6}$	~~-0.467~~ -0,647	0.5
$\frac{\pi}{4}$	-0.242	0
$\frac{\pi}{3}$	0.046	-0.5
$\frac{\pi}{2}$	0.452	-1
$\frac{2\pi}{3}$	0.739	-0.5
$\frac{3\pi}{4}$	0.857	0

1

(b) Berechnen Sie die Stelle t_w, für die die Kurve im Inneren des Intervalls $(0.1 < t < \frac{3\pi}{4})$ eine waagerechte Tangente hat. Berechnen sie auch die zugehörigen x_w, y_w Werte. Berechnen Sie zusätzlich die Krümmung und den Krümmungskreisradius an der Stelle t_w. (Falls Sie t_w nicht ermitteln konnten, berechnen Sie die Krümmung und den Krümmungskreisradius an der Stelle $t = \frac{1}{2}$)

Waagerechte Tangente intw falls $\dot{y}(t_w) = 0$ und $\dot{x}(t_w) \neq 0$

$\Rightarrow \dot{y}(t) = -2\sin(2t)$, dies ist im möglichen Definitionsbereich nur für $t_w = \frac{\pi}{2}$ 1

Für $t_w = \pi/2$ siehe Tabelle : $x_w(\frac{\pi}{2}) = 0.452$ 1/2

$y_w(\frac{\pi}{2}) = -1$ 1/2

1/2 Ansatz

Krümmung $\varkappa = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Bigg|_{t_w = \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\frac{2}{\pi} \cdot (-4)}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3}$

8

$\dot{x}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{t} = \frac{2}{\pi}$

$\dot{y}(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\ddot{x}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{t^2} = -\frac{4}{\pi^2}$

$\ddot{y}(\frac{\pi}{2}) = -4\cos(2t)|_{t=\pi/2} = +4$

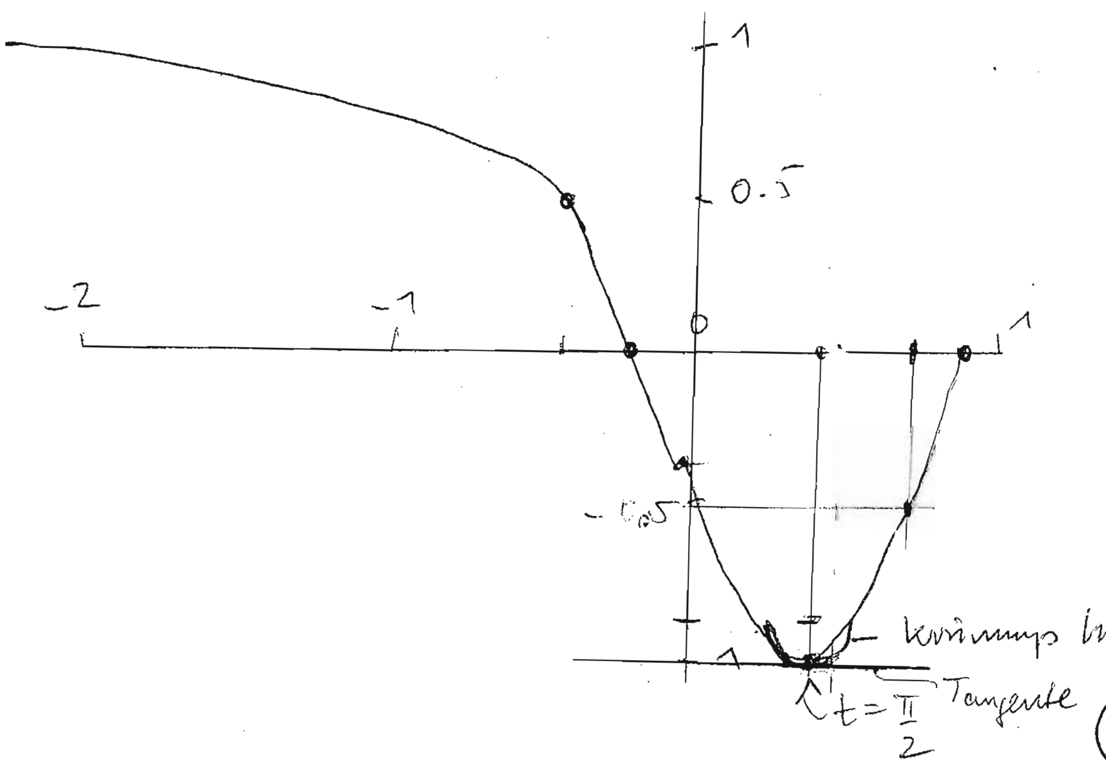
1/2

$\boxed{\varkappa = 0.101}$

$\boxed{r = \frac{1}{\varkappa}} = \frac{\pi^2 \cdot (\cdot 8)}{8} = \pi^2$

$= 9.8696044$ 1

(c) Skizzieren Sie die Kurve ($C : x(t) = \ln(t), y(t) = \cos(2t), 0 \leq t \leq \pi$, 1LE=4cm), die waagerechte Tangente und den Krümmungskreis.



Skizze 2

Skizze

5. **Aufgabe: Simpson-Verfahren und Reihenentwicklung** (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$$

(a) Berechnen Sie das Polynom $T_3(x)$ der Mc-Laurin-Reihe (Taylorreihe an der Stelle $x = 0$).
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

aus FS

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{3}{48}u^3 \quad 1$$

$$u = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{3}{48}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \dots$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 \quad 2$$

anderer Weg ggf insgesamt 4

$$\sqrt{1+\sin(x)} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x) + \cos(x) = \dots$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} T_3(x)\,dx$

$\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} T_3(x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{192}\right]_0$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^3}{192} - \frac{\pi^4}{3072} \quad 1$$

$$= 1.99446890 \quad 1$$

(c) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ mit dem Simpson-Verfahren mit der Schrittweite $h = \frac{\pi}{8}$.

Formel gefunden $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$

1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) = (*)$$

mit $h = \frac{\pi}{8}$

1/2 $y_0 = f(0) = \sqrt{1+0} = 1$

1/2 $y_1 = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1.175875602$

1/2 $y_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.306562965$

1/2 $y_3 = f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \sqrt{1+\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)} = 1.387039845$

1/2 $y_4 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} = 1.41421356$

$$(*) = \frac{\pi}{24}\left(1 + 4.703502408 + 2.61312593 + 5.54815938 + 1.414213562^{11}\right) = \pi \cdot 0.6366625053 = 2.00016$$

1/2

1

Wenn Zwischenergebnisse fehlen, eventuell Punktabzug (je nach Situation).

6. **Aufgabe: Ausgleichskurve** (/ ca. 7 Punkte)

Bei einem Versuch wurden folgende Messungen gemacht. Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem (1LE=1cm) ein, entscheiden Sie sich, welche Ausgleichskurve geeignet ist und berechnen Sie sie.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-2	-0,98	4	1,96
2	-1,5	0,02	2.25	-0.03
3	-1	1,02	1	-1.02
4	-0,5	1,96	0.25	-0.98
5	0	2,95	0	0
6	0,5	4,02	0.25	2.01
7	1,0	5,01	1	5.01
8	1,5	5,96	2.25	8,94
Σ	-2	19,96	11	15,89
	1/2	1/2	1/2	1/2

Innere Tabellenwerte 1

$n = 8$

$y = a \cdot x + b$ mit

Ansatz 1

$$a = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 15.89 - (-2) \cdot 19,96}{8 \cdot 11 - \cancel{11^2} (-2)^2} = 1.988571429 \quad 2$$

Ansatz 1

$$b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{11 \cdot 19,96 - (-2) \cdot 15,89}{8 \cdot 11 - (-2)^2}$$

2.992142857 2

64+34

```
> plot(z,x =-2..2);
```

Warning, unable to evaluate the function to numeric values in the region; see the plotting command's help page to ensure the calling sequence is correct

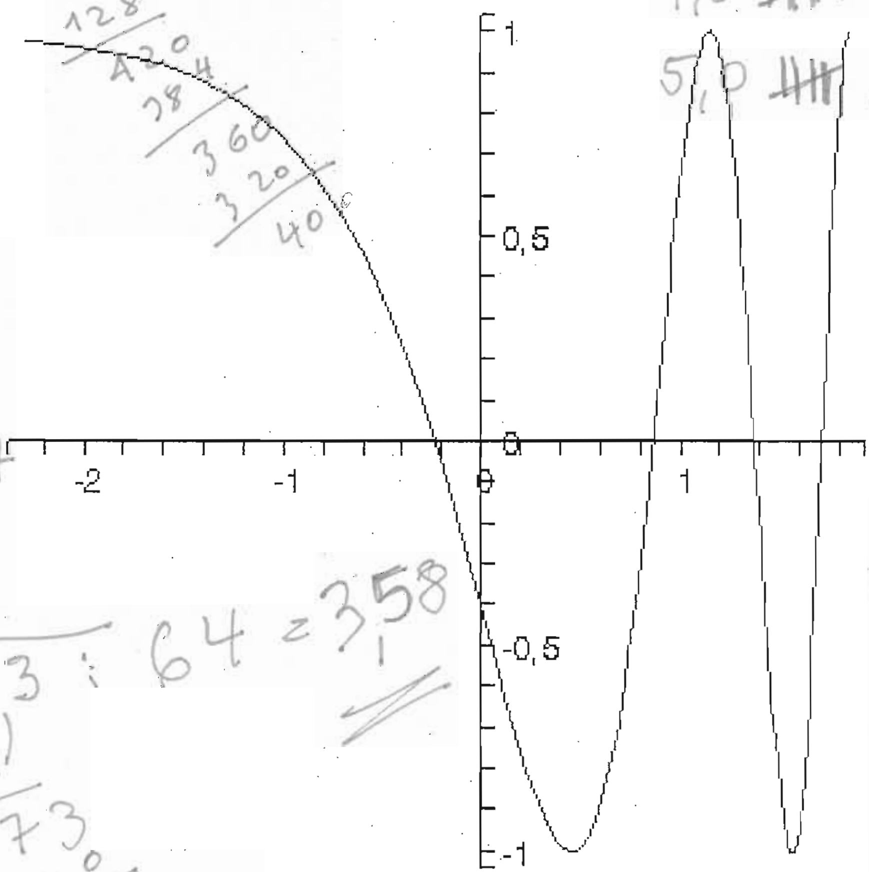
Error, empty plot

```
> restart;
> #zum Thema ebene Kurven
> x :=t->ln(t);y := t->cos(2*t);
```

$$x := t \to \ln(t)$$

$$y := t \to \cos(2\,t)$$

```
>
> plot([x(t),y(t),t=0.1..2*Pi]);
```



1,0
1,3
1,7 ||
2,0 ||
2,3 |||| |
2,7 |||| |
3,0 |||| |||| |
3,3 ||||
3,7 |||| |||| |
4,0 ||||
5,0 |||| |||| |||| ||

170 : 64 = 0,2656
128
420
384
360
320
400

3,4
4
30,0
33
13,2
40,7
20
85
229,3 : 64 = 3,58
192
373
320
530
512
18

20,5	4,0
24,5	3,7
28,5	3,3
32,5	3,0
36,5	2,7
40,5	2,3
44,5	2,0
48,5	1,7
52,5	1,3
56,5	1,0

∅ Note 3,58

∅ Quote $\frac{17}{64}$ = 26,56%

```
> # Wo hat die Kurve eine waagrechte Tangente?;
> y := cos(2*t);x:= ln(t);
```

$$y := \cos(2\,t)$$