Hochschule München Fakultät 03 FA SS 08

Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Bergmann, Hörwick, Kloster, Pöschl, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 68 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Die Aufgaben 1-5 gelten für alle Studierenden. Alle Studierenden aus dem 2. Semester bearbeiten zusätzlich Aufgabe 6, alle WiederholerInnen Aufgabe 7

Notenschlüssel

	< ~~22,5~~	5,0	
~~23~~	26,5	~~4,0~~	5,0
27	30,5	~~3,7~~	4,0
31	34,5	~~3,3~~	3,7
35	38,5	~~3,0~~	3,3
39	42,5	~~2,7~~	3,0
43	46,5	~~2,3~~	2,7
47	50,5	2,0	2,3
51	54,5	~~1,7~~	2,0
55	58,5	~~1,3~~	1,7
~~59~~ 63 ≤ ...		1,0	
59	62,5	1,3	

1. Aufgabe: Ebene Kurven (/ ca. 10 Punkte)
Gegeben ist die ebene Kurve

$$C : x(t) = t - t^3, \quad y(t) = t^2, \quad -1 \leq t \leq +1$$

(a) Berechnen Sie die Stelle t_h, für die die Kurve eine horizontale Tangente hat. Berechnen sie auch den zugehörigen Punkt $H = (x_h, y_h)$.

(/ca. 3)

1/2 $\dot{x} = 1 - 3t^2$

1/2 $\dot{y} = 2t$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = 1-3t^2\\ \dot{y}=2t\end{array}\right\} y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{1-3t^2}$ 1/2

horizontale Tangente $\Leftrightarrow$ $y' = 0 \Rightarrow t_h = 0$ 1/2

$x_h = 0$ 1/2 $\quad y_h = 0$ 1/2 $\quad H = (0|0)$

(b) Berechnen Sie die Stellen t_{v1} und t_{v2}, für die die Kurve eine vertikale Tangente hat. Berechnen sie auch den zugehörigen Punkte $V_1 = (x_{v1}, y_{v1})$ und $V_2 = (x_{v2}, y_{v2})$.

(/ca. 3)

vertikale Tangente $\Leftrightarrow$ $y' \to \pm\infty$

$\rightsquigarrow \dot{x} = 1 - 3t_v^2 = 0 \Rightarrow t_{v_1} = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ 1/2

$t_{v_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 1/2

1/2 $x_{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}385$

1/2 $y_{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} = 0{,}33$

$\Big\} V_1 = (0{,}385 \,|\, 0{,}333$

1/2 $x_{v_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -0{,}385$

1/2 $y_{v_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$\Big\} V_2 = (-0{,}385 \,|\, 0{,}33$

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(c) Berechnen Sie die Neigung der Tangenten zu den t-Werten $t_A = 1$ (mit dem zugehörigen Punkt $A = (x_A, y_A)$) und $t_E = -1$ (mit dem zugehörigen Punkt $E = (x_E; y_E)$).

(/ca. 3)

1/2 $x_A = 1 - 1^3 = 0$ $y_A = 1^2 = 1$ 1/2

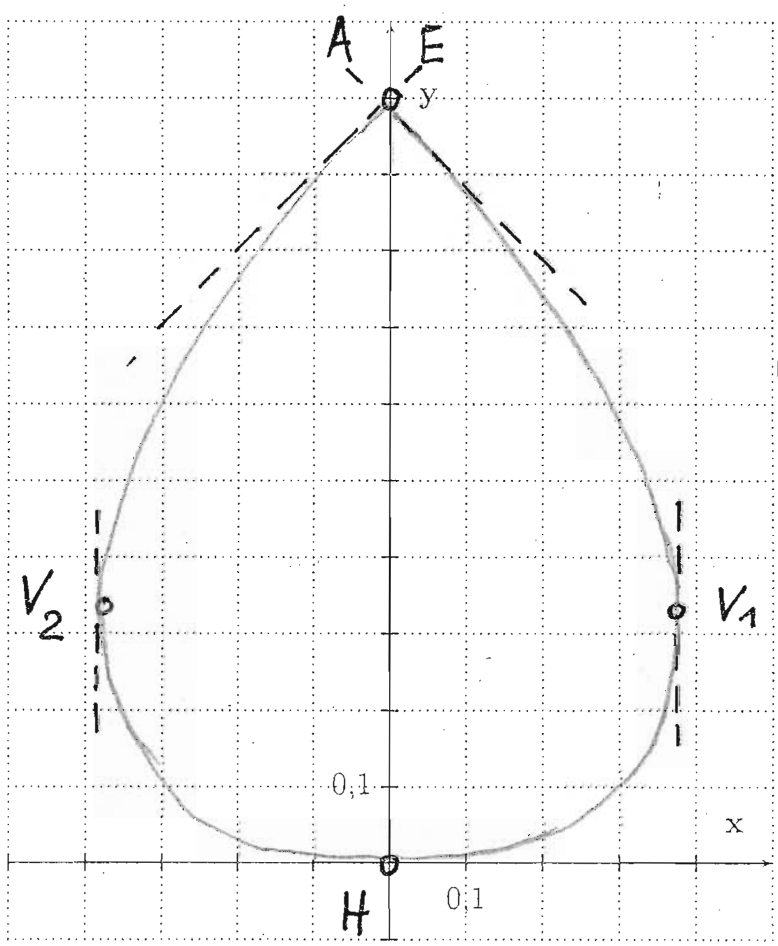
$y'_A = \dfrac{2 \cdot 1}{1 - 3 \cdot 1} = -1$ 1/2 $A(0|1)$

1/2 $x_E = -1 - (-1)^3 = 0$ $y_E = (-1)^2 = +1$ 1/2 $E(0|1)$

$y'_E = \dfrac{2 \cdot (-1)}{1 - 3 \cdot (-1)^2} = +1$ 1/2

(d) Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe der Ergebnisse aus (a), (b) und (c).

(/ca. 1)



1/2 für Punkte & Tangenten

1/2 Kurve

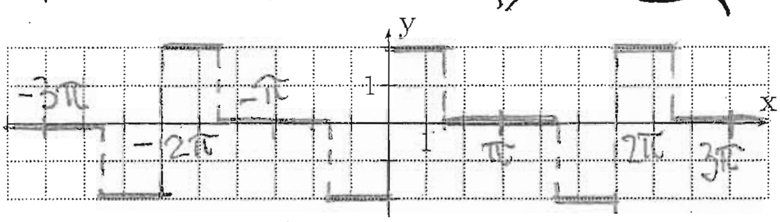
2. Aufgabe: Fourierreihen (/ ca. 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} -c & \text{für } -a \le t \le 0 \\ +c & \text{für } 0 < t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{für } -\pi \le t < \pi, \quad \text{periodisch sonst, } a \in]-\pi, \pi[.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-3\pi, 3\pi[$ für $a = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ (1LE=0,5cm). (/ca. 3)

1 1 1



(b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(t)$? Was folgt daraus für die Fourier-Koeffizienten? (/ca. 2)

1 $f(t)$ ist ungerade (punktsymmetrisch um den Ursprung)

$a_0 = 0$, $a_n = 0$

1/2 1/2

(c) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$ für $a = \frac{\pi}{2}$, c beliebig. (/ca. 2)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} c \cdot \sin(nt)\, dt$$ 1

$$= \frac{2c}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \left[-\cos(n \cdot t) \right] \Big|_0^{\pi/2}$$ 1/2

$$= \frac{2c}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$ 1/2

(d) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 4. Glied an: $F_4(t)$ für $c = 1$ und $a = \frac{\pi}{2}$.

(/ca. 5)

$$b_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot \pi}\left[1 - \underbrace{\cos\frac{1 \cdot \pi}{2}}_{\to 0}\right] \Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi} \quad 1$$

$$b_2 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \pi}\left[1 - \underbrace{\cos\frac{2\pi}{2}}_{\to -1}\right] \Rightarrow b_2 = \frac{2}{\pi} \quad 1$$

$$b_3 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot \pi}\left[1 - \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{\to 0}\right] \Rightarrow b_3 = \frac{2}{3\pi} \quad 1$$

$$b_4 = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot \pi}\left[1 - \underbrace{\cos\frac{4\pi}{2}}_{\to +1}\right] \Rightarrow b_4 = 0 \quad 1$$

$$F_4(t) = \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{\pi}\sin 2t + \frac{2}{3\pi} \cdot \sin 3t \quad 1$$

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 16 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = x^2 + xy^2 + 2x + 3.$$

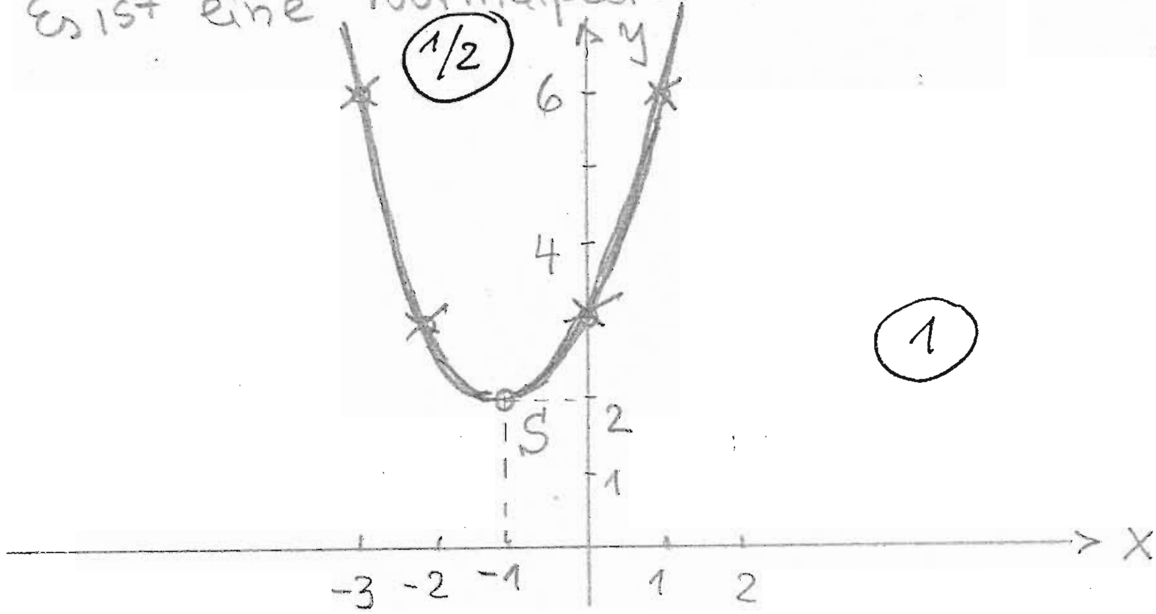
(a) Berechnen und zeichnen (1LE =1cm) Sie die Schnittkurve mit der x, z-Ebene.

(/ca. 2)

x,z-Ebene $\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow z = f(x,0) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ 1/2

Es ist eine Normalparabel mit $S = (-1|2)$ 1/2



1

(b) Berechnen Sie die Tangentialebene im Punkt $P = (-1; 1; z_P)$.

(/ca. 4)

1/2 $z_x = 2x + y^2 + 2 \Rightarrow$ 1/2 $z_x^P = 2\cdot(-1) + 1^2 + 2 = 1$

1/2 $z_y = 2xy \Rightarrow z_y^P = 2\cdot(-1)(+1) = -2$ 1/2

1/2 $z_P = (-1)^2 + (-1)\cdot 1^2 + 2\cdot(-1) + 3 = +1$

1/2 $z - z_P = z_x^P\,(x - x_P) + z_y^P\,(y - y_P)$

$z - 1 = 1\,(x - (-1)) - 2\,(y - 1)$ 1/2

6

$z = x - 2y + 4$ 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(c) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte.

(/ca. 5)

1/2 $z_x = 2x + y^2 + 2 \overset{!}{=} 0$

1/2 $z_y = 2xy \overset{!}{=} 0$

$\nearrow x_1 = 0 \Rightarrow$ kein y_1 möglich 1/2

$\searrow y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$ 1/2

$R = (-1|0|2)$

$z_{xx} = 2$ 1/2 $z^R_{xx} = 2$

$z_{yy} = 2x$ 1/2 $z^R_{yy} = -2$

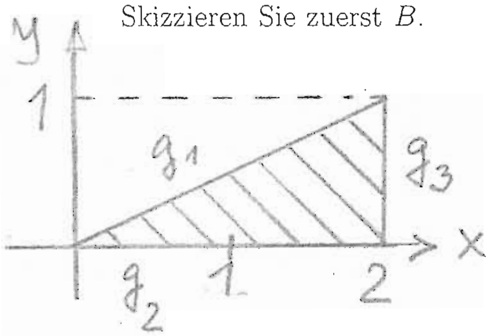
$z_{xy} = 2y$ 1/2 $z^R_{xy} = 0$

$D^R = 2\cdot(-2) - 0^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ in R liegt ein Sattelpunkt

1/2 1/2 1/2

(d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten (z=0) von dem Normalbereich B und oben von der gegebenen Fläche ($z = f(x,y) = x^2 + xy^2 + 2x + 3$) begrenzt wird. B sei begrenzt durch die Geraden $g_1(x) = \frac{1}{2}x$, $g_2(x) = 0$ und $g_3 : x = 2$. Skizzieren Sie zuerst B.

(/ca. 5)



$V = \int\limits_{x=0}^{2} \left\{ \int\limits_{y=0}^{g_1} [x^2 + xy^2 + 2x + 3]\,dy \right\} dx$ 1 1/2

$= \int\limits_{x=0}^{2} \left[x^2y + \frac{1}{3}xy^3 + 2xy + 3y\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}x} dx$ 1

$= \int\limits_{x=0}^{2} \left\{ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x \right\} dx =$ 1/2

$= \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]\Big|_0^2 =$ 1/2

$= \frac{2^4}{8} + \frac{2^5}{120} + \frac{2^3}{8} + \frac{3}{4}\cdot 2^2 = 2 + \frac{32}{120} + \frac{8}{3} + 3 =$ 1/2

1/2

1/2

$= 5 + \frac{4}{5} + \frac{8}{3} = 7\frac{14}{15} = 7{,}933$

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 12 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = (x + y - 1)^2 - 1$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung 1. Ordnung .

(/ca. 4)

Substitution: $u = x + y - 1$ (1)

$\Downarrow$

$u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$

eingesetzt in die DGL : $u' - 1 = u^2 - 1$ (1)

$\frac{du}{dx} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = dx \quad | \int$

(1) $-\frac{1}{u} = x + C \quad$ | umkehren

(1/2) $u = -\frac{1}{x+C} = x + y - 1$ (Rücksubstitution)

$y = -\frac{1}{x+C} - x + 1$ (1/2)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Randbedingung: $x_1 = 1, y_1 = y(x_1) = 1$.

(/ca. 2)

$1 = -\frac{1}{1+C} \cancel{-1+1}$ (1/2)

$\Downarrow$ $1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$ (1/2)

$y = \frac{1}{2-x} + 1 - x$ (1)

(c) Berechnen Sie $y_s(0)$ analytisch.

(/ca. 1)

$$y(x=0) = \frac{1}{2-0} + 1 - 0 = \frac{3}{2}$$ 1

(d) Berechnen Sie den Näherungswert bei $x_0 = 0$ mit den Randbedingungen aus (b) ($x_1 = 1$ und $y_1 = 1$) und $h = -1$ mit Hilfe vom Runge-Kutta-Verfahren in einem Schritt.

(/ca. 5)

i	x_i	y_i	$k_i = -1 \cdot \{(x+y-1)^2 - 1\}$	
I	1	1	0	1/2
II	0,5	1	$-1\{(0{,}5+1-1)^2 - 1\} = +0{,}75$	1
III	0,5	1,375	$-1\cdot\{(0{,}5+1{,}375-1)^2-1\} = 0{,}234375$	1
IV	0	1,234375	$+0{,}945068359$	1

$$k = \frac{1}{6}\{0 + 2\cdot(0{,}75 + 0{,}234375) + 0{,}945068359\}$$ 1/2

$$k = 0{,}485636393$$

$$y(x=0) = y(x=1) + k = 1 + 0{,}485636393 = 1{,}485636393$$

1

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (/ ca. 9 Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 5y' + 6y = 20e^{2x}$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 3)

charakteristische Gleichung

1 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$

1/2 $\lambda_1 = +3$; $\lambda_2 = +2$ 1/2

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ 1

(b) Geben Sie die Ansatzfunktion für die Berechnung der partikulären Lösung an.

(/ca. 1)

$\lambda_1 = 3$		$\lambda_2 = 2$	
$n = 0$	$\alpha = 2$	$\beta = 0$	$q = 1$

$\alpha + j\beta = 2 = \lambda_2 \neq \lambda_1$

→ Ansatz $y_p = b_0 \cdot x^1 \cdot e^{2x}$ 1

(c) Berechnen Sie die partikuläre Lösung.

(/ca. 4)

$y_p = b_0 \cdot x \cdot e^{2x}$

1/2 $y_p' = b_0(1+2x)e^{2x}$

1/2 $y_p'' = 4b_0(1+x) \cdot e^{2x}$

eingesetzt in die inhomogene Dgl (gekürzt durch $e^{2x} \neq 0$)

$4b_0(1+x) - 5b_0(1+2x) + 6b_0 x = 20$ 1

Koef.-Vergleich in x^1: $4b_0 - 10b_0 + 6b_0 \equiv 0$ 1/2

Koef.-Vergleich in x^0: $4b_0 - 5b_0 = 20$ 1/2

$-b_0 = 20$

$\Downarrow$

$b_0 = -20$ 1/2

$y_p = -20xe^{2x}$ 1/2

(d) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 1)

$y_{ges} = C_1 e^{3x} + (C_2 - 20x)e^{2x}$ 1

ACHTUNG: Nur für Studierende des 2. Semesters.

6. **Aufgabe: Statistisches Verfahren** (/ ca. 9 Punkte)

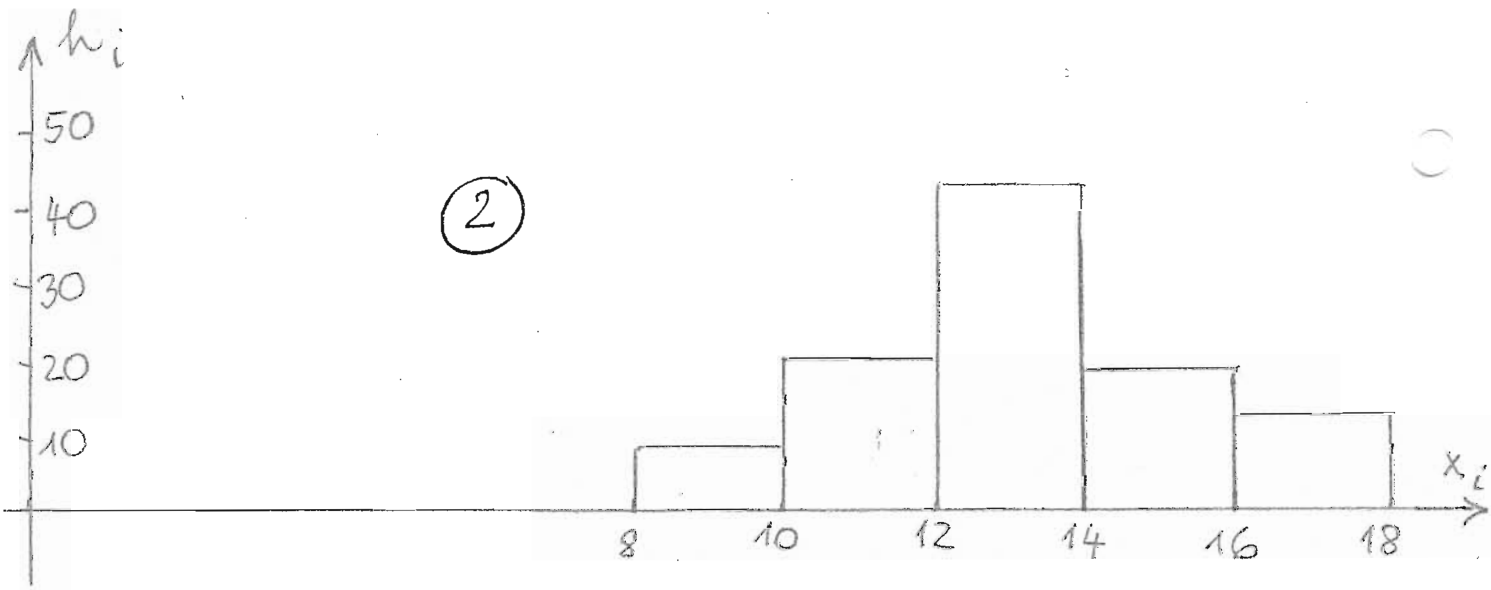
Gegeben ist die folgende Messreihe:

Klasse	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$	$12 \leq x < 14$	$14 \leq x < 16$	$16 \leq x < 18$
Anzahl x_i	8	20	42	18	12

(a) Zeichnen Sie das zugehörige Balkendiagramm.

(/ca. 2)

2



(b) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standarabweichung s.

(/ca. 3)

$\sum x_i = 8+20+42+18+12 = 100 = n$ 1/2

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{j} m_i \cdot h_i = \frac{1}{100} \{ 9 \cdot 8 + 11 \cdot 20 + 13 \cdot 42 + 15 \cdot 18 + 17 \cdot 12 \}$

$\bar{x} = \frac{1312}{100} = 13{,}12$ 1

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{j} \left[h_i \cdot (m_i - \bar{x})^2 \right] =$

$= \frac{1}{99} \cdot \{ 8(9-13{,}12)^2 + 20 \cdot (11-13{,}12)^2 + 42 \cdot (13-13{,}12)^2 +$ 1

$+ 18 \cdot (15-13{,}12)^2 + 12 (17-13{,}12)^2 \} = 4{,}75313131 3$

$s = \sqrt{s^2} = 2{,}180167726$ 1/2

(c) Im Folgenden sei die Standardabweichung $\sigma = s$ und der Erwartungswert $\xi = \bar{x}$ aus Teil (b) zu verwenden. (Wenn Sie die Werte nicht bestimmen konnten, verwenden Sie die Ersatzwerte $\sigma_e = 4,8$ und $\xi_e = 13,1$) Es sei davon auszugehen, dass die Daten näherungsweise normalveteilt sind.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt demnach ein Messwert X_i im Bereich $13,6 \leq X_i < 16,5$?
Lesen Sie dazu geeignete Werte aus der Tabelle der Normalverteilung ab (s. Anhang).
Die Eingabewerte für die Quantile der Verteilungsfunktion der Normalverteilung sollen dazu auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet werden.

(/ca. 4)

$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ (normiert und zentriert)

$u_u = \frac{x_u - 13,12}{2,18} = \frac{13,6 - 13,12}{2,18} = 0,22018 \approx 0,22$ 1

$u_o = \frac{x_o - 13,12}{2,18} = \frac{16,5 - 13,12}{2,18} = 1,55046 \approx 1,55$ 1

1/2 $\Phi_u = \Phi(0,22) = 0,5871$; $\Phi_o = \Phi(1,55) = 0,9394$ 1/2

$\Phi = \Phi_o - \Phi_u = 0,9394 - 0,5871 = 0,3523 \hat{=} 35,23\%$ 1

Lösung mit Ersatzwerten

$u_u = \frac{x_u - 13,1}{2,2} = \frac{13,6 - 13,1}{2,2} = 0,2272727 \approx 0,23$ 1

$u_o = \frac{x_o - 13,1}{2,2} = \frac{16,5 - 13,1}{2,2} = 1,5454 \approx 1,55$ 1

1/2 $\Phi_u = \Phi(0,23) = 0,5910$ $\Phi_o = \Phi(1,55) = 0,9394$ 1/2

$\Phi = \Phi_o - \Phi_u = 0,9394 - 0,5910 = 0,3484 \hat{=} 34,84\%$

1

ACHTUNG: Nur für WiederholerInnen.

7. **Aufgabe: Taylor-Reihen** (/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right), \quad |x| \leq \frac{\pi}{4}$$

(a) Bestimmen Sie die Glieder der Taylor-Polynom um $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) von $f(x)$ bis zur Potenz x^4.
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

(/ca. 5)

Substitution $u = \sin(x)$

$$f(u) = \ln \frac{1+u}{1-u} = 2\left\{ u + \frac{u^3}{3} + R_5(u) \right\} \quad 1$$

$$T_4(u) = 2u + \frac{2}{3}u^3 \quad 1/2$$

Rücksubstitution

$$T_4(x) = 2\sin(x) + \frac{2}{3}(\sin(x))^3 \quad 1/2$$

McLaurin-Reihe für $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}$ 1

eingesetzt in $T_4(x)$

$$T_4(x) = 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = \quad 1$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^3 = 2x + \frac{1}{3}x^3 \quad 1$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} T_4(x)\mathrm{d}x$.

(/ca. 2)

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} T_4(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \left(2x + \frac{1}{3}x^3\right)dx$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^{\pi/4} \quad 1$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = 0{,}61685 + 0{,}03171 =$$

$$= 0{,}64856 \quad 1/2$$

1/2

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ näherungsweise mit Hilfe der Kepplerschen Fassregel.

(/ca. 2)

$$f(x) = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

1/2 1/2

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$
$f(x)$	0	$0{,}8064$	$1{,}762747$

$$h = \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{3}h\left\{f(0) + 4\cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{8}\left\{0 + 4\cdot 0{,}8064 + 1{,}762747\right\} = 0{,}653$$

1/2