03.07.09
Lösungsblatt

HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA SS 09

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Vielemeyer, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve (die sogenannte Evolvente)

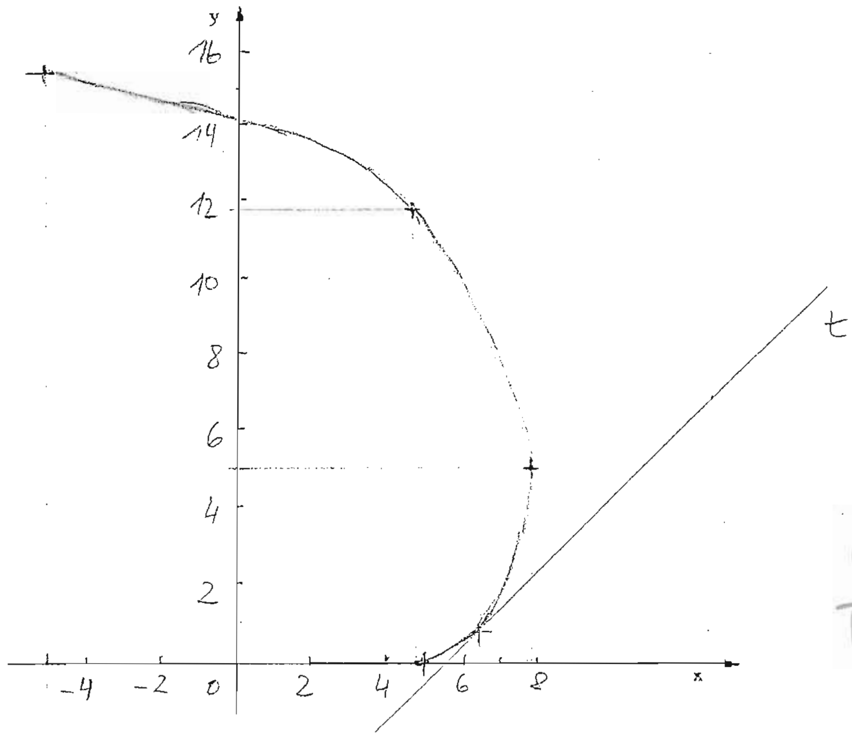
$$C : x(t) = 5\cos(t) + 5t\sin(t), \quad y(t) = 5\sin(t) - 5t\cos(t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus und skizzieren Sie die Kurve (eine Einheit entspricht 0,5 cm).

(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$
0	5	0
$\frac{\pi}{4}$	6,312	0,759
$\frac{\pi}{2}$	$5\pi/2 \approx 7{,}854$	5
$\frac{3\pi}{4}$	4,795	11,866
π	−5	$5\pi \approx 15{,}708$

2,5



1,5

Kurve 1 Punkt
Tangente 0.5 Punkte

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Berechnen Sie die Steigung $m_0 = y'$ an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Skizzieren Sie die zugehörige Tangente in der Zeichnung von a) .

(/ca. 3)

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cancel{5\cos(t)} - \cancel{5\cos(t)} + 5t\sin(t)}{-\cancel{5\sin(t)} + \cancel{5\sin(t)} + 5t\cos(t)} = \tan(t)$$

1 1 0,5

$$\underline{\underline{m_0}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{1}}$$

0,5

$\dot{x} = 2.777\ldots$

$\dot{y} = 2.777\ldots$

(c) Berechnen Sie die Krümmung und den Krümmungskreisradius an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{4}$ (gleiche Stelle wie bei b)).

(/ca. 3)

$\dot{x}(t) = 5t\cos(t)$ $\qquad \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$ 0,5

$\ddot{x}(t) = 5\cos(t) - 5t\sin(t)$; $\quad \ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \approx 0.7587$

$\dot{y}(t) = 5t\sin(t)$ $\qquad \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$

1,5

$\ddot{y}(t) = 5\sin(t) + 5t\cos(t)$; $\quad \ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \approx 6.3123$

$$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\varkappa_0 = \frac{\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{5^2\pi^2}{32} + \frac{5^2\pi^2}{32}\right)^{3/2}} = \frac{5\pi\,(\cancel{20} + 5\pi - \cancel{20} + 5\pi)\cdot 4^3}{32\cdot(5\pi)^3}$$

$$\varkappa_0 = \frac{4}{5\pi} \implies \underline{\underline{\rho = \frac{5\pi}{4} \approx_3 3{,}9270}}$$

1

$\varkappa = 0.2546114$

2. **Aufgabe: Simpson-Verfahren und Reihenentwicklung** (/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x} \cdot \ln(1+x)$$

(a) Berechnen Sie das Polynom $T_4(x)$ der Mc-Laurin-Reihe (Taylorreihe an der Stelle $x = 0$).
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen. (ca. 4)

$$\sqrt{1+a} = (1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \dots$$

(/ca. 4) 0,5

$$\ln(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + - \dots$$

0,5

$$T_4(x) \approx \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

1

$$T_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{6}\right) - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{16}$$

1

$$\underline{\underline{T_4(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4}}$$

1

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 T_4(x)\mathrm{d}x$

(/ca. 1,5)

$$\int_0^1 T_4(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{238}{480} \approx 0{,}497917}}$$

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ mit dem Simpson-Verfahren mit der Schrittweite $h = 0,25$.

(/ca. 3,5)

$y_0 = f(0) = 0$

$y_1 = f(0,25) = 0,249482074$

$y_2 = f(0,5) = 0,496591311$

$y_3 = f(0,75) = 0,740302102$

$y_4 = f(1) = 0,980258433$

2,5

$I \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\right)$

1

$\approx \cancel{0,459933680}$

$\approx 0,494381456 3$

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2+4x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Höhenlinien (z =const) Kreise sind. (/ca. 1)

$$z = e^{\ln z} = e^{-x^2-y^2+4x}$$

$$k = \ln z = -x^2 - y^2 + 4x$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 - k$$

$\Longrightarrow$ Kreis um $M = (2;0)$ mit Radius $\sqrt{4-\ln z}$

(b) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte. (/ca. 6)

$$z_x = (-2x+4)\, e^{-x^2-y^2+4x} \qquad 0,5$$

$$z_{xx} = -2e^{-x^2-y^2+4x} + (-2x+4)^2 e^{-x^2-y^2+4x} \qquad 1$$

$$z_y = -2y\, e^{-x^2-y^2+4x} \qquad 0,5$$

$$z_{yy} = 4y^2 e^{-x^2-y^2+4x} - 2e^{-x^2-y^2+4x} \qquad 1$$

$$z_{xy} = z_{yx} = (-2x+4)(-2y)\, e^{-x^2-y^2+4x} \qquad 1$$

Notw. Bed. $z_x = 0 \Longrightarrow x_e = 2$

$z_y = 0 \Longrightarrow y_e = 0$ 1

Hinr. Bed.: $\det(H) > 0$

$$\det(H) = \begin{vmatrix} -2e^4 & 0 \\ 0 & -2e^4 \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow \text{Extremum} \qquad 0,5$$

$z_{xx}(x_e, y_e) < 0 \Longrightarrow$ Maximum in $(2;0;e^4)$ 0,5

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1; 2; z_P)$.

(/ca. 2)

$z_x(1;2) = 2e^{-1}$

$z_y(1;2) = -4e^{-1}$

$z(1;2) = e^{-1}$

1

Tangentialebene

$z = 2e^{-1}(x-1) - 4e^{-1}(y-2) + e^{-1}$

1

$$z = \frac{2}{e}x - \frac{4}{e}y + \frac{7}{e}$$

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 9 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \frac{4y}{x} = 5$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung 1. Ordnung .

(/ca. 7)

Subst.: $u = \frac{y}{x}$; $y = u \cdot x$; $y' = u'x + u$

Ansatz: 1

$u'x + u + 4u = 5$

$\int \frac{du}{u-1} = -5 \int \frac{dx}{x}$ 2

$\ln|u-1| = -5 \ln|x| + \ln C_1$ 1

$u - 1 = C_2 x^{-5}$ 1

Rücksubst.: $\frac{y}{x} - 1 = \frac{C_2}{x^5}$ 1

$$\underline{\underline{y = \frac{C_2}{x^4} + x}}$$ 1

Variation der Konstanten:

Ansatz 1

1. hom. DGL:

$y_h' + \frac{4}{x} y_h = 0$

$\Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -\frac{4}{x} y_h$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y_h} dy_h = -4 \int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \ln y_h = -4 \ln x + \ln K$

$\Rightarrow \ln y_h = \ln \frac{K}{x^4}$

$\Rightarrow y_h = \frac{K}{x^4}$ 2

2. Variation:

$y = \frac{K(x)}{x^4} \Rightarrow y' = \frac{K'(x)x^4 - 4K(x)x^3}{x^8}$ 1

$\Rightarrow \frac{K'(x) \cdot x^4 - 4K(x)x^3}{x^8} + \frac{4 \cdot \frac{K(x)}{x^4}}{x} = 5$ 1

$\Rightarrow \frac{K'(x)}{x^4} = 5 \Rightarrow K'(x) = 5x^4$ 1

$\Rightarrow K(x) = x^5 + C$ 0,5

Einsetzen: $y = \frac{x^5 + C}{x^4} = x + \frac{C}{x^4}$ 0,5

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung: $x_1 = 1, y_1 = y(x_1) = 2$.

(/ca. 1)

$$2 = \frac{C_2}{1} + 1 \implies C_2 = 1$$

$$\underline{\underline{y_s = \frac{1}{x^4} + x}}$$

(c) Berechnen Sie $y_s(3)$ analytisch.

(/ca. 1)

$$y_s(3) = \frac{1}{81} + 3 = \cancel{\frac{242}{81}} = \cancel{2.98765321}$$

$$= 3.0123 \ldots$$

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (/ ca. 11 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 16y = s(x)$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$\lambda^2 + 16 = 0$ 0,5 (/ca. 2,5)

$\lambda_{1,2} = \pm 4i$ 1

$y_h = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x)$ 1

(b) Geben Sie die Ansatzfunktion für die Berechnung der partikulären Lösung an für:

(/ca. 2,5)

i. $s(x) = 16\sin(4x)$

$y_p = x \cdot (A \sin(4x) + B \cos(4x))$ 1,5

ii. $s(x) = 7\sin(3x)$

$y_p = A \sin(3x) + B \cos(3x)$ 1

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

(c) Berechnen Sie die partikuläre Lösung für $s(x) = 7\sin(3x)$.

(/ca. 5)

$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x)$

$y_p' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$ 1

$y_p'' = -9A\sin(3x) - 9B\cos(3x)$ 1

in DGL einsetzen:

$-9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) + 16A\sin(3x) + 16B\cos(3x) = 7\sin(3x)$ 1

KV: $\sin(3x)$: $-9A + 16A = 7 \Rightarrow A = 1$ 1,5

$\cos(3x)$: $-9B + 16B = 0 \Rightarrow B = 0$

$y_p = \sin(3x)$ 0,5

(d) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 1)

$y_{allg} = y_h + y_p$

$y_{allg} = C_1\sin(4x) + C_2\cos(4x) + \sin(3x)$

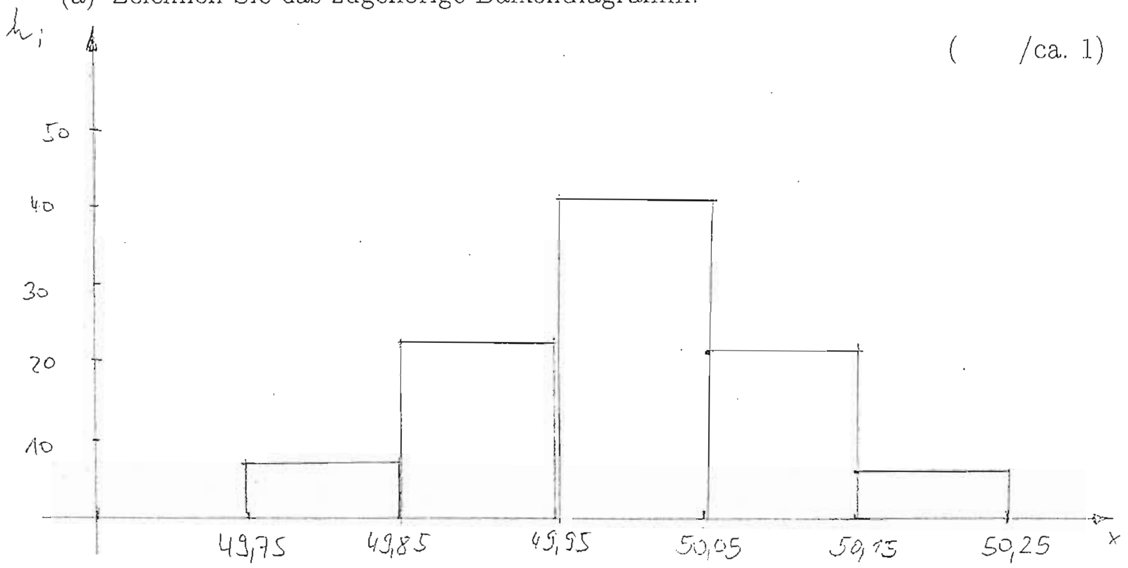
6. **Aufgabe: Statistisches Verfahren** (/ ca. 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Messreihe über die Füllmenge in 100 Kraftstofftanks mit dem Sollinhalt 50 Liter:

Inhalt in Liter	Anzahl	m_i	$m_i \cdot h_i$	$h_i/n = r_i$	$r_i^{(k)}$	$\Delta_i = m_i - \bar{x}$	$\Delta_i^2 \cdot h_i$
49,75 - 49,85	7	49,8	348,6	0,07	0,07	− 0,197	0,271663
49,85 - 49,95	23	49,9	1147,7	0,23	0,30	− 0,097	0,216407
49,95 - 50,05	42	50,0	2100,0	0,42	0,72	+ 0,003	0,000378
50,05 - 50,15	22	50,1	1102,2	0,22	0,94	+ 0,103	0,233398
50,15 - 50,25	6	50,2	301,2	0,06	1,00	+ 0,203	0,247254
Σ	100		4999,7				0,969100 = SAQ

(a) Zeichnen Sie das zugehörige Balkendiagramm.

(/ca. 1)



(b) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ (Genauigkeit: mind. 3 Nachkommastellen)und die empirische Standardabweichung s (Genauigkeit: mind. 4 Nachkommastellen). Für die Berechnung sollen die Klassenmitten der jeweiligen Klassen als Repräsentanten verwendet werden.

(/ca. 3)

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \cdot h_i}{n} = \frac{4999{,}7}{100} = 49{,}997 \, l \qquad 1$$

$$s^2 = \frac{SAQ}{n-1} = \frac{0{,}9691}{99} = 0{,}00978889$$

$$s = \sqrt{s^2} = 0{,}0989 \, l \qquad 2$$

Fortsetzung Aufgabe: Statistisches Verfahren

(c) Im Folgenden sei die Standardabweichung $\sigma = s$ und der Erwartungswert $\xi = \bar{x}$ aus Teil (b) zu verwenden. (Wenn Sie die Werte nicht bestimmen konnten, verwenden Sie die Ersatzwerte $\sigma_e = 0,0989$ und $\xi_e = 49,997$). Es sei davon auszugehen, dass die Daten näherungsweise normalverteilt sind.

Wieviel Prozent der Tanks enthalten weniger als 49,9 Liter?

Lesen Sie dazu geeignete Werte aus der Tabelle der Normalverteilung ab (s. Anhang). Die Eingabewerte für die Quantile der Verteilungsfunktion der Normalverteilung sollen dazu auf 2 Stellen nach dem Komma **gerundet** *werden.*

(/ca. 3)

$$\xi_1 = \frac{49,9 - 49,997}{0,0989} = -0,980789 \rightarrow -0,98$$ 1,5

$$\Phi(-0,98) = 1 - \Phi(0,98) = 1 - 0,8365 = 0,1635 \mathrel{\hat{=}} 16,35\,\%$$

1,5

(d) Wahrscheinlichkeitspapier

(/ca. 5)

für das Zeichnen

i. Tragen Sie geeignete Werte im beigefügten Wahrscheinlichkeitspapier ein und stellen Sie fest, ob die Daten näherungsweise als normalverteilt angesehen werden können (Begründung!). 2

ja, die Punkte liegen auf einer Geraden 0,5

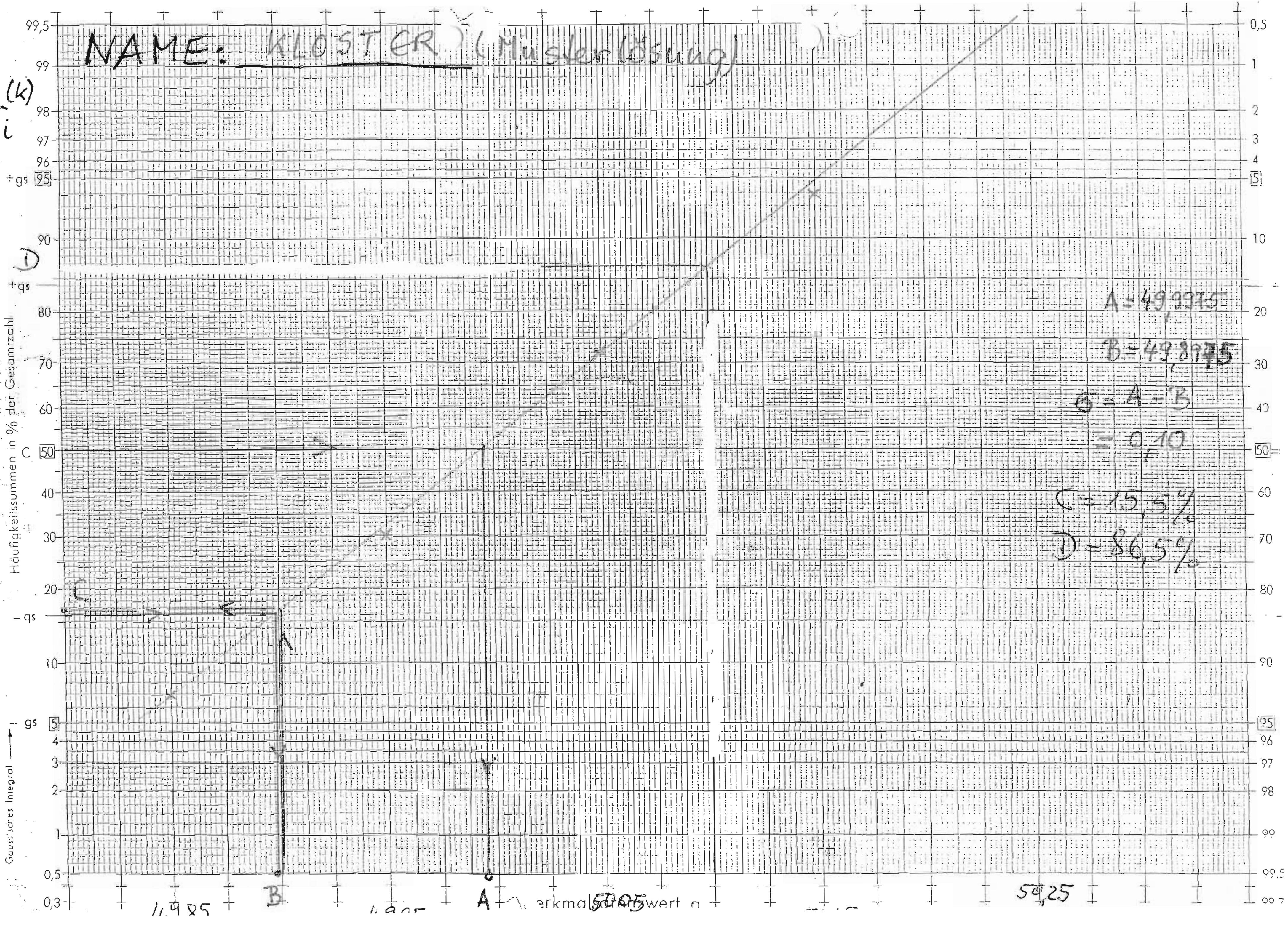
ii. Lesen Sie im Wahrscheinlichkeitspapier den Mittelwert und die Standardabweichung der Verteilung ab.

$\bar{x} = 49,9975 \qquad \sigma = 0,10$ 1

iii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Tank einen Inhalt zwischen 49,9 und 50,1 Liter?

$\Phi(49,9) = 15,5\,\%$; $\Phi(50,1) = 86,5\,\%$ 1

$\Phi(49,9 \leq x \leq 50,1) = 71\,\%$ 0,5



NAME: KLOSTER (Musterlösung)
$r_i^{(k)}$
Häufigkeitssummen in % der Gesamtzahl
Gauss'sches Integral
+gs
+qs
−qs
−gs
C
D
A = 49,9975
B = 49,8975
σ = A − B
= 0,10
C = 15,5 %
D = 86,5 %
A
B
49,85
50,05
50,25
Merkmalsgrenzwert g