HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA SS 10

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Kaltsidou-Kloster, Pöschl, Radtke, Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!**

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 62 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 11 Punkte)**

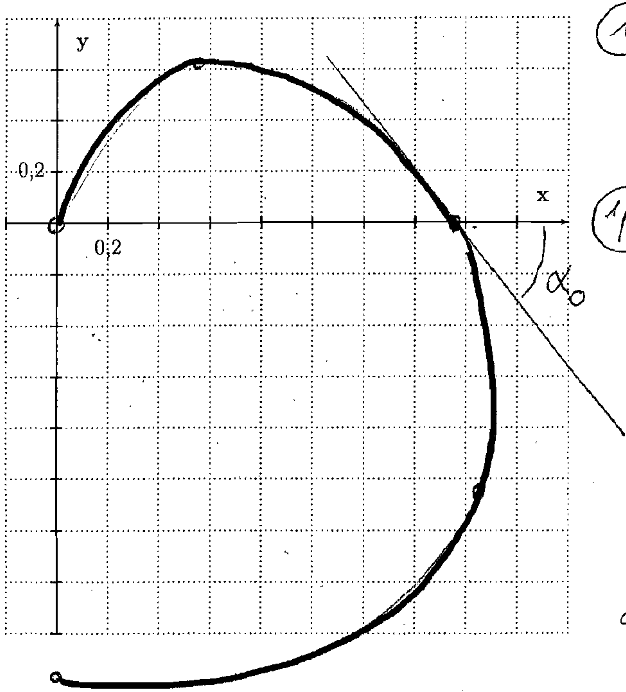
Gegeben ist die ebene Kurve

$$C: x(t) = t\cdot\sin(t), \quad y(t) = \sqrt{t}\cdot\cos(t) \quad 0 \le t \le \pi$$

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus und skizzieren Sie die Kurve.

(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$	
0	0	0	1/2
$\frac{\pi}{4}$	0,555	0,627	1/2
$\frac{\pi}{2}$	1,571	0	1/2
$\frac{3\pi}{4}$	1,666	-1,085	1/2
π	0	-1,772	1/2



1 für die Eintragung der Punkte

1/2 für Skizze der Kurve

1/2 für das Zeichnen der Tangente

$$\tan\alpha_0 = -1{,}2533 \Rightarrow \alpha_0 = -51{,}14°$$

(b) Berechnen Sie die Steigung $m_0 = y'$ an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Skizzieren Sie die zugehörige Tangente in der Zeichnung von a).

(/ca. 3)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sin(t) + t\cdot\cos(t) \quad (1/2)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\cdot\sin(t) \quad (1/2)$$

$$\dot{x}\left(t=\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (1/2) \qquad \dot{y}\left(t=\frac{\pi}{2}\right) = -1{,}2533 \quad (1/2)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow y'\left(t=\frac{\pi}{2}\right) = -1{,}2533 \quad (1/2)$$

(Bem.: 1/2 Pkt von (b) wurde an der Zeichnun der Tangente – S2 – vergeben)

(c) Berechnen Sie die Krümmung und den Krümmungskreisradius an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{2}$ (gleiche Stelle wie bei b)).

(/ca. 4)

$$\ddot{x}(t) = \cos(t) + \cos(t) - t\cdot\sin(t) = 2\cos(t) - t\cdot\sin(t) \quad (1/2)$$

$$\ddot{x}(t=\pi/2) = -1{,}5708 \quad (1/2)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{-\sin(t)\cdot 2\cdot\sqrt{t} - \cos(t)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{4t} - \sqrt{t}\cdot\cos(t) - \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{\cos(t)}{4t\sqrt{t}} - \sqrt{t}\cos(t) \quad (1)$$

$$\ddot{y}(t=\pi/2) = -\frac{1}{\sqrt{\pi/2}} = -0{,}7979 \quad (1/2)$$

$$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow \varkappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1\cdot(-0{,}7979) - (-1{,}5708)(-1{,}2533)}{\left[(1)^2 + (-1{,}2533)^2\right]^{3/2}} \quad (1/2)$$

$$\varkappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}671 \quad (1/2) \qquad \rho = \left|\frac{1}{\varkappa}\right| \Rightarrow \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}490 \quad (1/2)$$

(b) Berechnen Sie nun den Schnittpunkt mit Hilfe des Newton-Verfahren. Sie müssen dazu die Gleichung $x = h(x)$ in ein Nullstellenproblem überführen, also $f(x) = x - h(x) = 0$. Berechnen Sie x_3 mit Hilfe des Newton-Verfahrens (Startwert x_0=0,5).

(/ca. 5)

$f(x) = x - 1 + 0{,}5 \cdot \tan(x)$ (1)

$f'(x) = 1 + 0{,}5\{1 + \tan^2(x)\}$

(1) $x_j = x_{j-1} - \frac{f(x_{j-1})}{f'(x_{j-1})} = x_{j-1} - \frac{x_{j-1} - 1 + 0{,}5 \cdot \tan(x_{j-1})}{1 + 0{,}5 \cdot \{1 + \tan^2(x_{j-1})\}}$

$x_0 = 0{,}5$

(1) $x_1 = 0{,}5 - \frac{0{,}5 - 1 + 0{,}5 \cdot \tan(0{,}5)}{1{,}5 + 0{,}5 \cdot \tan^2(0{,}5)} = 0{,}63754885$

$= 0{,}63308566$

(1) $x_2 =$

$= 0{,}63307923$

(1) $x_3 =$

$= 0{,}63307923 = x_3$

($x_4 =$ $\Rightarrow$ Iteration steht)

2. **Aufgabe: Newtonverfahren** (/ ca. 9 Punkte)

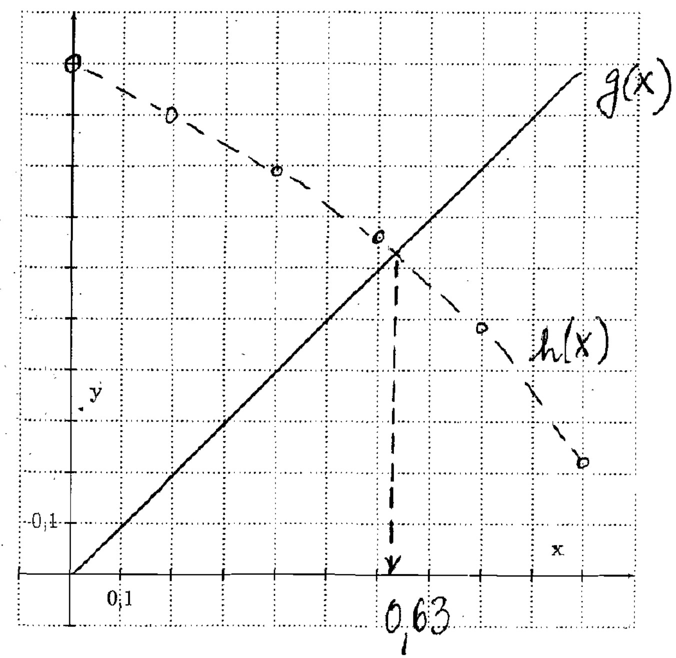
Gesucht ist der Schnittpunkt zwischen der Geraden $g(x) = x$ und der Funktion $h(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \tan(x)$.

(a) Füllen Sie die Wertetabelle und skizzieren Sie $g(x) = x$ und $h(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \tan(x)$ und lesen den Schnittpunkt aus der Skizze ab.

(/ca. 4)

x	$g(x)$	$h(x)$
0	0	1
0,2	0,2	0,90
0,4	0,4	0,79
0,6	0,6	0,66
0,8	0,8	0,49
1	1,0	0,22

1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2



(1)

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 13 Punkte)
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

(a) Welche Form haben die Höhenlinien? Setzen Sie dazu $z = z_0$. (/ca. 1)

$$z_0 = \frac{1}{1+x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$1+x^2+y^2 = \frac{1}{z_0} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{z_0} - 1 = r^2 \quad (1)$$

$\Downarrow$ Kreise

$$(\text{für } 0 < z_0 < 1)$$

(b) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion. (/ca. 4)

$$f_x = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} \quad (1/2)$$

analog

$$f_y = \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad (1/2)$$

$$f_{xx} = \frac{-2(1+x^2+y^2)^2 + 2x\cdot 2\cdot(1+x^2+y^2)\cdot(2x)}{(1+x^2+y^2)^4} \quad (1/2)$$

$$= \frac{-2-2x^2-2y^2+8x^2}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{6x^2-2y^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} \quad (1/2)$$

analog: $f_{yy} = \dfrac{6y^2-2x^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} \quad (1)$

$$f_{xy} = \frac{-(-2x)\cdot 2\cdot(1+x^2+y^2)\cdot(2y)}{(1+y^2+x^2)^4} = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} \quad (1)$$

$$z_P = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}[x-(-1)] - \frac{1}{9}(y-2) = \frac{4}{9} + \frac{x}{18} - \frac{y}{9} \quad (1/2)$$

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (-1; 2; z_P)$. (/ca. 2)

$$z_P = \frac{1}{1+(-1)^2+(2)^2} = \frac{1}{6} \quad (1/2)$$

$$(1/2)\quad f_x|_P = \frac{-2\cdot(-1)}{6^2} = +\frac{1}{18}\ ; \quad f_y|_P = \frac{-2\cdot(+2)}{6^2} = -\frac{1}{9} \quad (1/2)$$

(d) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte. (/ca. 3)

$(1/2)\ f_x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_E = 0$
$(1/2)\ f_y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y_E = 0$
$\Rightarrow E = (0; 0; 1)$

$(1/2)\ f_{xx}|_E = -2$
$(1/2)\ f_{yy}|_E = -2$
$(1/2)\ f_{xy}|_E = 0$

$\Rightarrow (f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2)_E = +4 \Rightarrow$ Extremum
weil $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximum $(1/2)$

(e) Berechnen Sie mit Polar- bzw. Zylinderkoordinaten

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei G der Kreis um (0;0) mit dem Radius $r = 1$ ist. (/ca. 3)

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{1} \left[\frac{1\cdot r}{1+r^2} \right] dr \right\} d\varphi \quad (1)$$

(weil $dA = (r\,d\varphi)\cdot dr$) $(1/2)$

$$= \int_{\varphi=0}^{1} \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 d\varphi = 2\pi \left\{ \frac{1}{2}\ln(2) - \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1)}_{0} \right\}$$

$$V = 2{,}1776 \quad (1/2)$$

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ **ca. 7 Punkte**)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' - \frac{y}{x} = 3x^3$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. (/ca. 2)

$$y_h' = \frac{y_h}{x} \Rightarrow \frac{dy_h}{y_h} = \frac{dx}{x} \quad 1/2$$

$$1 \quad \ln|y_h| = \ln|x| + C \quad | \int$$

$$y_h = e^C \cdot x = \tilde{C} \cdot x \quad 1/2$$

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Variation der Konstanten. (/ca. 3)

$$(*) \quad y = K(x) \cdot x \quad 1/2 \Rightarrow y' = K'(x) \cdot x + K(x) \quad 1/2$$

eingesetzt in die inhom. DGL

$$K'(x) \cdot x + \cancel{K(x)} - \frac{\cancel{K(x) \cdot x}}{\cancel{x}} = 3x^3 \quad |:x$$

$$\frac{dK}{dx} = 3x^2 \quad 1/2 \quad \Rightarrow \quad dK = 3x^2 dx \quad |\int \quad 1/2$$

$$K(x) = x^3 + \hat{C} \quad 1/2$$

eingesetzt in den Ansatz $(*)$ $\Rightarrow$

$$y = x^4 + \hat{C} \cdot x \quad 1/2$$

(c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung: $x_0 = 1, y_0 = y(x_0) = 0$. (/ca. 1)

$$y_0 = 0 = x_0^4 + \hat{C} \cdot x_0 = 1^4 + \hat{C} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \hat{C} = -1 \quad 1/2$$

$$y = x^4 - x \quad 1/2$$

(d) Berechnen Sie $y_s(2)$ analytisch. (/ca. 1)

$$y(x=2) = 2^4 - 2 = 16 - 2 = 14 \quad 1$$

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**
(/ ca. 12 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 9y = \cos(2x)$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. (/ca. 2,5)

$$y_h'' - 6y_h' + 9y_h = 0 \quad \text{mit } y_h = e^{\lambda x} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{charakt. GL.: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x} \quad 1$$

(b) Berechnen Sie die partikuläre Lösung. (/ca. 5,5)

$$\alpha = 0 \ ; \ \beta = 2 \ ; \ m = 0 \ ; \ \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 \neq \alpha + j\beta = 2j \neq \lambda_2 \Rightarrow q = 0 \quad 1$$

$$\text{Ansatz: } y_p = A \cdot \cos(2x) + B \sin(2x) \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y_p' = -2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x)$$

$$y_p'' = -4A \cdot \cos(2x) - 4B \cdot \sin(2x)$$

y_p, y_p' und y_p'' eingesetzt in die inhom. DGL:

$$-4A \cdot \cos(2x) - 4B \cdot \sin(2x) - 6\{-2A \cdot \sin(2x) + 2B \cos(2x)\}$$
$$+ 9\{A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)\} = \cos(2x)$$

Koeff.-Vergleich in

$$(i)\ \cos(2x): \quad -4A - 12B + 9A = 1 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$(ii)\ \sin(2x): \quad -4B + 12A + 9B = 0 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\text{aus } (ii) \Rightarrow 12A + 5B = 0 \Rightarrow B = -\tfrac{12}{5} A$$

$$\text{in } (i) \Rightarrow -4A - (12)\cdot\left(-\tfrac{12}{5}\right)A + 9A = 1$$

$$\Rightarrow A = +\frac{5}{169} \quad \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow B = -\frac{12}{169} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{169}\{5 \cdot \cos(2x) - 12 \cdot \sin(2x)\}$$

(c) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an. (/ca. 1)

$$y_{ges} = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{169}\left(5\cos(2x) - 12 \cdot \sin(2x)\right) \quad 1$$

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $y(x=0) = 1$ und $y'(x=0) = 2$ (/ca. 3)

$$y_{ges}' = e^{3x}(3C_1 + 3C_2 x + C_2) + \frac{1}{169}\{-10 \cdot \sin(2x) - 24 \cos(2x)\} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y(x=0) = \underbrace{1 = C_1 + \frac{5}{169}}_{} \quad \tfrac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{164}{169} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y'(x=0) = \underbrace{2 = 3C_1 + C_2 - \frac{24}{169}}_{} \quad \tfrac{1}{2} \Rightarrow C_2 = -\frac{130}{169} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$y_{ges} = \frac{1}{169}\{(164 - 130x) \cdot e^{3x} + 5\cos(2x) - 12 \cdot \sin(2x)\} \quad \tfrac{1}{2}$$

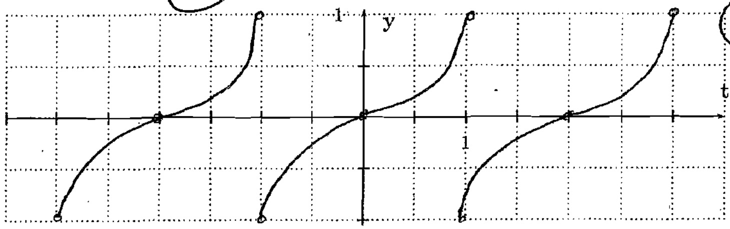
6. **Aufgabe: Fourierreihen** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende periodische Funktion mit der Periode $T = 2$

$$f(t) = t^3 \quad \text{für } -1 \le t \le 1, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-3,3[$.

1/2 1 (/ca. 2) 1/2



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten (a_0, a_n, b_n). (/ca. 5,5)

Funktion ungerade $\Rightarrow$ $a_0 = 0$ 1/2

$a_n = 0$ 1/2

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t^3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt = 2\int_0^1 t^3 \sin(\pi n t)\,dt$$ 1/2

FS (Integral 210 für $k = 3$)

$$b_n = 2\cdot\left\{-\frac{t^3\cdot\cos(\pi n t)}{\pi n} + \frac{3t^2\cdot\sin(\pi n t)}{(\pi n)^2} - \frac{3\cdot 2}{(\pi n)^2}\int t^{3-2}\cdot\sin(\pi n t)\,dt\right\}$$ 1

$$= 2\cdot\left\{-\frac{t^3\cdot\cos(\pi n t)}{\pi n} + \frac{3t^2\sin(\pi n t)}{(\pi n)^2} - \frac{6}{(\pi n)^2}\left[\frac{\sin(n\pi t)}{(\pi n)^2} - \frac{t\cdot\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]\right\}\Bigg|_0^1$$ 1

$$b_n = 2\cdot\left\{-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} - \frac{6}{(\pi n)^2}\cdot\left(-\frac{\cos(\pi n)}{(\pi n)}\right)\right\}$$ 1

$$= -2\,\frac{\cos(\pi n)}{\pi n}\left\{1 - \frac{6}{(\pi n)^2}\right\}$$

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 3. Glied an: $F_3(t)$. (/ca. 2,5)

$n = 1 \Rightarrow b_1 = +\frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{6}{\pi^2}\right\} = 0,2496$ 1/2

$n = 2 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{3}{2\pi^2}\right\} = -0,26993$ 1/2

$n = 3 \Rightarrow b_3 = +\frac{2}{3\pi}\left\{1 - \frac{2}{3\pi^2}\right\} = 0,19787$ 1/2

$n = 4 \Rightarrow b_4 = -\frac{1}{2\pi}\left\{1 - \frac{3}{8\pi^2}\right\} = -0,1531$ 1/2

$$F_4(t) = 0,2496\sin(\pi t) - 0,26993\cdot\sin(2\pi t) - 0,1531\cdot\sin(4\pi t) + 0,19787\cdot\sin(3\pi t)$$ 1/2