

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner

Aufgabensteller: Hörwick, Kaltsidou-Kloster, Pöschl, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!**Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!**

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 64
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Matrikelnummer:		
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufgabe: Ebene Kurven
Gegeben ist die ebene Kurve

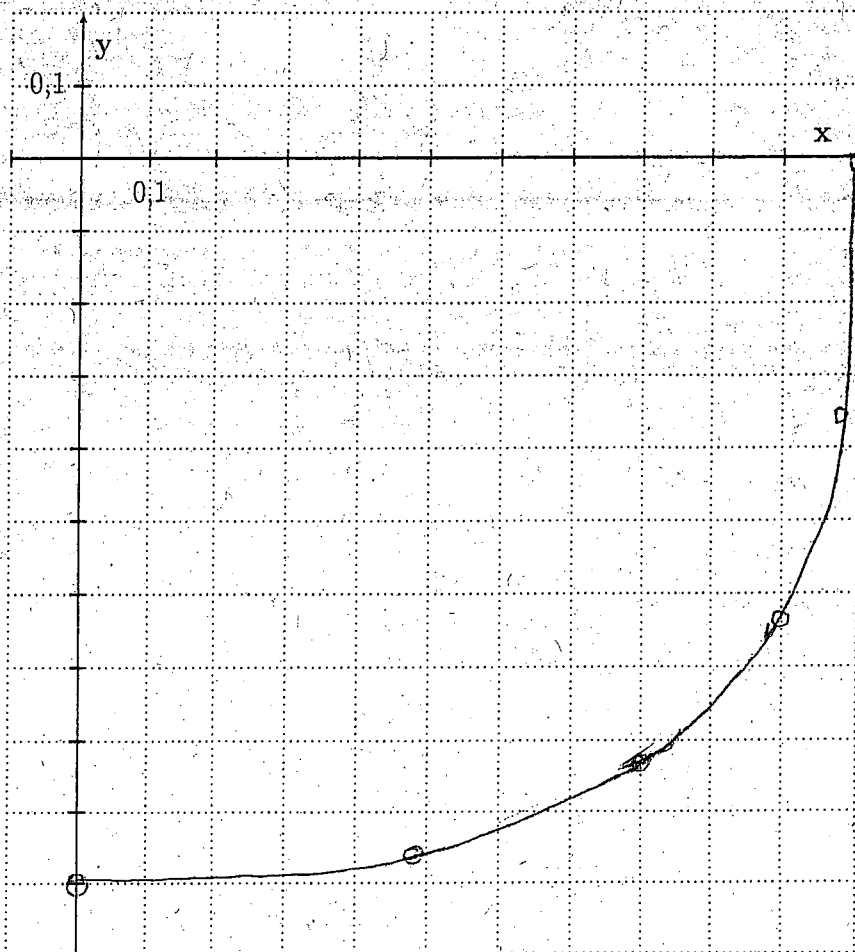
(/ ca. 11 Punkte)

$$C: x(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-t}, \quad y(t) = t^2 - 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle und skizzieren Sie die Kurve.

(/ ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	-1
0,2	0,49	-0,96
0,4	0,80	-0,84
0,6	0,99	-0,64
0,8	1,08	-0,36
1	1,10	0



(2)

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t , $x(t)$ und $y(t)$), wo eine

i. senkrechte bzw.

ii. waagerechte Tangente vorliegt.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{3e^{-t}(1-t)}$$

(/ ca. $\frac{4}{3}$) ←

$$\textcircled{1/2} \quad \dot{y} = 2t; \quad \dot{x} = 3e^{-t} - 3te^{-t} = 3e^{-t}(1-t) \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad \text{(i) } \perp \text{ Tang.} \Rightarrow y' \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow t_s = 1 \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad x_s = 1,10 \quad y_s = 0 \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad \text{(ii) hor. Tang.} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow t_h = 0 \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad x_h = 0 \quad y_h = -1 \quad \textcircled{1/2}$$

(c) Berechnen Sie die Krümmung und den Krümmungsradius an der Stelle $t_0 = 0$.

$$\dot{x} = 3e^{-t}(1-t) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = 3 \quad (/ \text{ca. } \frac{3}{4}) \quad \leftarrow$$

$$\textcircled{1/2} \quad \ddot{x} = 3e^{-t}(-1+t-1) = 3e^{-t}(t-2) \Rightarrow \ddot{x}(t=0) = -6$$

$$\dot{y} = 2t \Rightarrow \dot{y}(t=0) = 0$$

$$\ddot{y} = 2 \Rightarrow \ddot{y}(t=0) = 2$$

$$\textcircled{1/2} \quad \kappa(t=0) = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{3 \cdot 2 - (-6) \cdot 0}{(3^2 + 0^2)^{3/2}} \quad \textcircled{1/2}$$

$$\kappa(t=0) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} = 0,22 \quad \textcircled{1/2}$$

$$\rho(t=0) = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{9}{2} = 4,5 \quad \textcircled{1/2}$$

2. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

(/ ca. 12 Punkte)

$$z = f(x, y) = 5 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x^5 + \frac{5}{3} \cdot y^3$$

(a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion.

$$\begin{aligned} z_x &= 5y - 15x^4 & (1/2) \\ z_y &= 5x + 5y^2 & (1/2) \\ z_{xx} &= -60x^3 & (1/2) \\ z_{yy} &= +10y & (1/2) \\ z_{xy} &= +5 & (1/2) \end{aligned} \quad (/ \text{ca. } 2,5)$$

(b) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

$$\begin{aligned} z_x = 0 &\Rightarrow y = 3x^4 & (1/2) \\ z_y = 0 &\Rightarrow 0 = x + y^2 & (1/2) \\ &0 = x + (3x^4)^2 = x + 9x^8 = x(1 + 9x^7) & (1/2) \end{aligned} \quad (/ \text{ca. } 6,5)$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = 0 & (1/2) \\ (z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} &= 0 \cdot 0 - 5^2 = -25 & (1/2) \\ & & (1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ bei $P_1(0; 0; 0) \Rightarrow$ Sattelpunkt $(1/2)$

$$\text{(ii)} \quad 1 + 9x^7 = 0 \Rightarrow x_2 = +\sqrt[7]{-\frac{1}{9}} = -0,7306 \quad (1/2)$$

$$(1/2) \quad y_2 = 0,8548 \Rightarrow z_2 = -1,4571 \quad (1/2)$$

Bei $P_2(-0,7306; +0,8548; -1,4571) \Rightarrow \text{Min}$
(siehe S 5)

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

$$(z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2) \Big|_{x=-0,7306} = 175,0114 > 0 \Rightarrow \text{Extremum}$$

$$y = 0,8548$$

$$f_x(x_2, y_2) = 0,002420 \quad f_y(x_2, y_2) = 0,004152 \Rightarrow \text{Min}$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Doppelintegrals

$$I = \int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

(/ca. 3)

$$I = \int_{y=0}^2 \left\{ \int_{x=0}^1 (5xy - 3x^5 + \frac{5}{3} y^3) dx \right\} dy =$$

$$= \int_{y=0}^2 \left\{ \frac{5}{2} x^2 y - \frac{1}{2} x^6 + \frac{5}{3} y^3 \right\} \Big|_0^1 dy =$$

$$= \int_{y=0}^2 \left\{ \frac{5}{2} y - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} y^3 \right\} dy =$$

$$\left[\frac{5}{4} y^2 - \frac{1}{2} y + \frac{5}{12} y^4 \right] \Big|_0^2 =$$

$$= 5 - 1 + \frac{20}{3} = \frac{32}{3} = 10,67$$

3. Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

(/ ca. 10 Punkte)

$$y' = y^2 - 2y$$

- (a) Berechnen Sie für $k = -1, 0, 1, 2$ die Isoklinen und zeichnen Sie das Richtungsfeld mithilfe der Isoklinen.

$$y' = y(y-2) = y^2 - 2y = k$$

(/ ca. 4)

(1/2) 1)

$$y^2 - 2y = -1 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = +1$$

(1/2) 2)

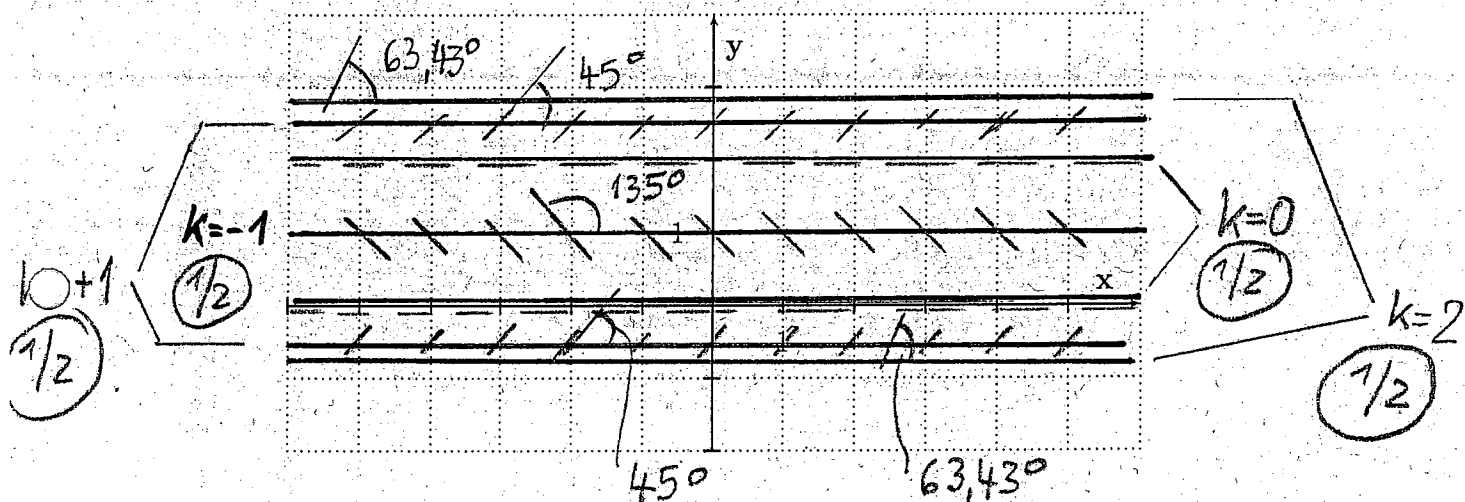
$$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 2$$

(1/2) 3)

$$y^2 - 2y = +1 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 1}}{2} \quad \begin{cases} y_1 = 2,4142 \\ y_2 = -0,4142 \end{cases}$$

(1/2) 4)

$$y^2 - 2y = 2 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 2}}{2} \quad \begin{cases} y_1 = 2,73 \\ y_2 = -0,73 \end{cases}$$



- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(/ ca. 4)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{y^2 - 2y} = dx \quad (1/2)$$

$$y^2 - 2y = ay^2 + by + c$$

$$a=1; b=-2; c=0$$

$$\Delta = 4ac - b^2 = -4 < 0 \quad (1/2)$$

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \frac{1}{\sqrt{1-4}} \ln \left| \frac{2y-2-\sqrt{4}}{2y-2+\sqrt{4}} \right| = x + C \quad | \cdot 2 \quad (1)$$

$$\ln \left| \frac{2y-4}{2y} \right| = 2x + C^* = \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| \quad | e \quad (1/2)$$

$$\frac{y-2}{y} = e^{2x+C^*} = \hat{C} \cdot e^{2x} \quad (1/2)$$

$$y(1 - \hat{C} e^{2x}) = 2 \quad (1/2)$$

$$y = \frac{2}{1 - \hat{C} \cdot e^{2x}} \quad (1/2)$$

(c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = 0$ und $y_0 = y(x_0) = 1$.

(/ca. 2)

$$y(x_0=0) = 1 = \frac{2}{1 - \hat{C}} \quad (1/2)$$

$$\Rightarrow \hat{C} = -1 \quad (1)$$

$$y = \frac{2}{1 + e^{2x}} \quad (1/2)$$

4. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
(/ ca. 13 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + ay' + 4y = s(x)$$

(a) Für welche Werte von a hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2} \quad (1/2) \quad (/ca. 3,5)$$

i. zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$?

$$a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a > 4 \text{ oder } a < -4 \quad (1)$$

ii. eine doppelte reelle Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2$?

$$a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = +4 \text{ oder } a = -4 \quad (1)$$

iii. zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$?

$$a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4 \quad (1)$$

(b) Geben Sie jeweils die Lösung der zugehörigen homogenen Lösung und die Ansatzfunktion der partikulären Lösung an, für:

i. $a = 5$ und $s(x) = x \cdot e^{-x}$

$$a = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4 \quad (1/2) \quad (/ca. 5,5)$$

λ_1	λ_2	a	β	m	q
-1	-4	-1	0	1	1

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} \quad (1/2)$$

$$y_p = x(b_0 + b_1 x) e^{-x} \quad (1/2)$$

ii. $a = -4$ und $s(x) = e^{2x}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad (1/2)$$

λ_1	λ_2	a	β	m	q
2	2	2	0	0	2

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{2x} \quad (1/2)$$

$$y_p = x^2 \cdot b_0 \cdot e^{2x} \quad (1/2)$$

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

iii. $a = 0$ und $s(x) = 24 \cdot \sin(4x) \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2j$ (1)

λ_1	λ_2	α	β	m	q
$2j$	$-2j$	0	4	0	0

$$y_{\text{hom}} = A \cdot \sin(2x) + B \cos(2x) \quad (1/2)$$

$$y_{\text{p}} = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x) \quad (1/2)$$

(c) Berechnen Sie für $a = 0$ und $s(x) = 24 \cdot \sin(4x)$ (siehe Aufgabenteil 4b,iii) die allgemeine Lösung und die spezielle Lösung für die Anfangswerte $y(0) = 3$ und $y'(0) = 0$.

○ $y_{\text{p}} = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x)$ (/ca. 4)

$$y_{\text{p}}'' = -16C_1 \sin(4x) - 16C_2 \cos(4x) \quad (1/2)$$

eingesetzt in die inhom. Dgl $\Rightarrow$

$$-16C_1 \sin(4x) - 16C_2 \cos(4x) + 4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x) = 24 \sin(4x)$$

Koeff. Vergl. in $\sin(4x)$:

$$-12C_1 = 24 \Rightarrow C_1 = -2$$

" " $\cos(4x)$:

$$-12C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$C_1 = -2$
$C_2 = 0$

○ $y_{\text{ges}} = A \cdot \sin(2x) + B \cos(2x) - 2 \sin(4x)$

$$y_{\text{ges}}' = +2A \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x) - 8 \cos(4x) \quad (1/2)$$

$$y(x=0) = 3 = B$$

$$\Rightarrow B = 3 \quad (1/2)$$

$$y'(x=0) = 0 = 2A - 8$$

$$\Rightarrow A = 4 \quad (1/2)$$

$$y_{\text{ges}} = 4 \cdot \sin(2x) + 3 \cdot \cos(2x) - 2 \sin(4x) \quad (1/2)$$

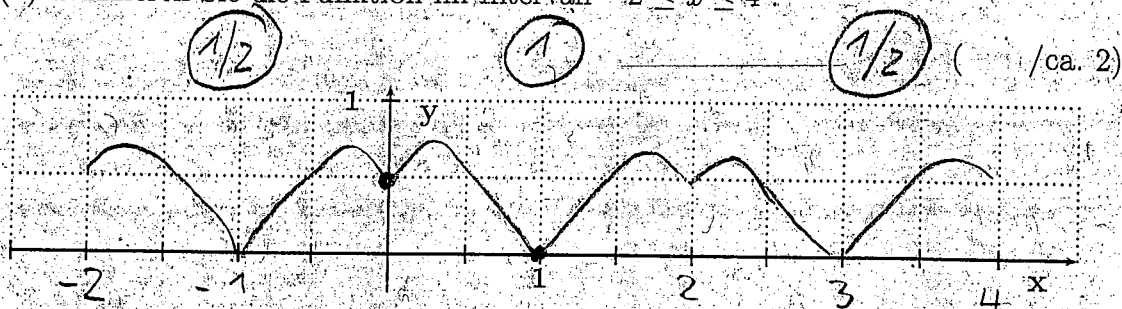
5. Aufgabe: Fourierreihen

(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sei die periodische Funktion mit der Periode $T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \text{periodisch} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-2 \leq x \leq 4$.



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten (a_0, a_n, b_n) . Beachten Sie hierbei die Symmetrie!

da Funktion gerade ($f(-x) = -f(x)$) (/ ca. 6)

$$\Rightarrow b_k = 0 \quad (1)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{T} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) dx$$

$$= 2 \left\{ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right\} \Big|_0^1 = \frac{2}{12} (-4 + 3 + 6) = \frac{5}{6} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^1 \left[-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \cos(n\pi x) dx = \quad (1/2)$$

$$2 \cdot \left\{ - \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \right\} = \quad (1/2)$$

$$2 \cdot \left\{ - \left[\frac{2x \cdot \cos(n\pi x)}{(\pi n)^2} + \frac{[(n\pi)^2 x^2 - 2] \cdot \sin(n\pi x)}{(n\pi)^3} \right] \Big|_0^1 + \right.$$

Fortsetzung Aufgabe: Fourierreihen

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} + \frac{x \cdot \sin(n\pi x)}{(n\pi)} \right] \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \}$$

$$= -4 \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} + \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - 1 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{-1 - 3(-1)^k}{(n\pi)^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

(c) Geben Sie die Fourier-Reihe an.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

(/ ca. 2)

$$= \frac{5}{12} - \frac{1}{(n\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 3(-1)^k) \cos(n\pi x)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

6. Aufgabe: Komplexe Zahlen

(/ ca. 6 Punkte)

Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{3z + 4j}{z^2 + jz + 6} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}$$

Factorisierung linken Nenners:

$$z^2 + jz + 6 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-j \pm \sqrt{-1 - 4 \cdot 6}}{2} \quad (1/2)$$

$$z_1 = \frac{-j + 5j}{2} = +2j \quad (1/2)$$

$$z_2 = \frac{-j - 5j}{2} = -3j \quad (1/2)$$

Rechte Seite:

$$\frac{A}{z - 2j} + \frac{B}{z + 3j} = \frac{A(z + 3j) + B(z - 2j)}{(z - 2j)(z + 3j)} = \quad (1)$$

$$= \frac{z(A + B) + j(3A - 2B)}{z^2 + z \cdot j + 6} \quad (1/2)$$

Koeffizientenvergleich

in z :

$$3 = A + B \quad 1 \cdot 2 \quad +)$$

in j :

$$4 = 3A - 2B$$

$$10 = 5A \Rightarrow$$

$$A = 2$$

eingesetzt in *)

$$3 = 2 + B \Rightarrow$$

$$B = 1$$

*) (1/2)

(1/2)

(1/2)

(1/2)