HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA SS 12

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner
Aufgabensteller:	Hörwick,Kaltsidou-Kloster,Pöschl,Warendorf,Mahnke

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!**

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 60
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

MUSTERLÖSUNG

1. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. **12 Punkte**)
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = y \cdot \cos(x) + x^2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion. (/ca. 2,5)

$f_x = -y \cdot \sin(x) + 2x$ 1/2

$f_{xx} = -y \cdot \cos(x) + 2$ 1/2

$f_y = \cos(x)$ 1/2

$f_{yy} = \emptyset$ 1/2

$f_{xy} = -\sin(x)$ 1/2

(b) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ. (/ca. 6,5)

1/2 $f_x \overset{!}{=} 0 = -y_E \cdot \sin(x_E) + 2x_E$

1/2 $f_y \overset{!}{=} 0 = \cos(x_E) = 0 \Rightarrow x_{E_1} = \frac{\pi}{2}$ $(90°)$ 1/2

$x_{E_2} = \frac{3\pi}{2}$ $(270°)$ 1/2

1/2 $y_E = \frac{2x_E}{\sin(x_E)} \Rightarrow y_{E_1} = \frac{2 \cdot \pi/2}{\sin(\frac{\pi}{2})} = +\pi$ 1/2

$y_{E_2} = \frac{2 \cdot (3\pi/2)}{(-1)} = -3\pi$ 1/2

$\Delta_1 = (f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)_{E_1} = -\sin^2\frac{\pi}{2} = -1$ 1/2

$z_{E_1} = \pi \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + (\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4}$ 1/2

in $E_1 = (\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{\pi^2}{4})$: Sattelpunkt 1/2

$\Delta_2 < 0$ (weil $f_{yy} = 0$) 1/2

$z_{E_2} = (-3\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = \frac{9\pi^2}{4}$ 1/2

$E_2 = \left(\frac{3\pi}{2}; -3\pi; \frac{9\pi^2}{4}\right)$: Sattelpunkt 1/2

(c) Berechnen Sie den Wert des Doppelintegrals

$$\int_0^{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(/ca. 3)

$$\int_{y=0}^{10} \left\{ \int_{x=0}^{\pi/2} \left[+y \cdot \cos(x) + x^2 \right] dx \right\} dy$$ 1/2

$$= \int_{y=0}^{10} \left[+y \cdot \sin(x) + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\pi/2} dy =$$ 1/2

1/2

$$= \int_{y=0}^{10} \left[+y \cdot 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 0 - 0 \right] dy = +\frac{1}{2}y^2 + \frac{\pi^3}{24} y \Big|_0^{10}$$

1/2

$$= +\frac{1}{2}y^2 + \frac{\pi^3}{24} y \Big|_0^{10} =$$

$$= +50 + 12{,}919 = -\cancel{37{,}081}\ 62{,}919$$

1/2 1/2

2. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 8 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot y = \frac{e^x}{\ln x}, \quad x > 1$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung. (/ca. 6)

(i) hom. DGL $\quad y_h' + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} y_h = 0$ (1/2)

$$\frac{dy_h}{y_h} = -\frac{dx}{x \cdot \ln(x)} \quad (1/2)$$

$$\ln|y_h| = -\ln|\ln(x)| + C \quad (1/2) \qquad | e^{\cdots}$$

$$y_h = e^{C} \cdot \frac{1}{e^{\ln|\ln(x)|}} = \frac{C^*}{\ln(x)} \quad (1/2)$$

(ii) inhom. DGL (V.d.K.)

Ansatz: $y = K(x)/\ln(x)$ (1/2)

$$y' = \frac{K'(x) \cdot \ln(x) - K(x) \cdot \frac{1}{x}}{[\ln(x)]^2} \quad (1/2)$$

y und y' eingesetzt in die inh. DGL $\Rightarrow$

$$\frac{K'(x) \cdot \ln(x) - K(x) \cdot \frac{1}{x}}{[\ln(x)]^2} + \frac{K(x)/\ln(x)}{x \cdot \ln(x)} = \frac{e^x}{\ln(x)} \quad (1)$$

$$\frac{K'(x)}{\ln(x)} = \frac{e^x}{\ln(x)} \Rightarrow dK(x) = e^x dx \quad \Big| \int$$

(1/2)

$$K(x) = e^x + D \quad 1/2$$

$$y = \frac{e^x + D}{\ln(x)} \quad 1/2 \quad \text{allg. Lsg}$$

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = 2$ und $y_0 = y(x_0) = 0$.

(/ca. 2)

$$y(x=2) = 0 = \frac{e^2 + D}{\ln(2)} \quad 1/2$$

$$D = -e^2 = -7{,}389 \quad 1/2$$

spezielle Lsg: $y = \dfrac{e^x - e^2}{\ln(x)}$ 1

3. **Aufgabe: Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 10y = s_i(x)$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm 2j}{2}$ $\lambda_1 = 3 + j$ (1/2), $\lambda_2 = 3 - j$ (1/2)

$y_h = e^{3x} \{ A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) \}$ (1)

(b) Es sei $s_1(x) = e^{3x} \cdot \cos(x)$.
Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

λ_1	λ_2	n	α	β	q
$3+j$	$3-j$	$\emptyset$	3	1	1

$\alpha + j\beta = 3 + 1 \cdot j = \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow q = \underline{1}$ (1)

$y_p = x \cdot e^{3x} \{ C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) \}$ (1)

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung für die Störfunktion $s_2(x) = 2e^{2x}$ und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(/ca. 4)

1/2 $y_p = C \cdot e^{2x} \Rightarrow y_p' = 2C \cdot e^{2x}$ 1/2

$y_p'' = 4 \cdot C \cdot e^{2x}$ 1/2

$4 \cdot C \cdot \cancel{e^{2x}} - 6 \cdot 2 \cdot C \cdot \cancel{e^{2x}} + 10 \cdot C \cdot \cancel{e^{2x}} = 2\cancel{e^{2x}}$ 1

$2C = 2 \Rightarrow C = 1$ 1/2

$y_{ges} = y_h + y_p = e^{3x}\{A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)\} + e^{2x}$

1/2 1/2

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte $x_0 = 0$, $y(x_0) = 3$ und $y'(x_0) = 0$.

(/ca. 2)

$y(x=0) = 3 = 1 \cdot \{A \cdot 0 + B \cdot 1\} + 1$

$\Rightarrow \boxed{B = 2}$ 1/2

$y' = e^{3x}\{3A \cdot \sin(x) + 3B \cdot \cos(x) + A \cdot \cos(x) - B \cdot \sin(x)\} + 2e^{2x}$

1/2

$y'(x=0) = 0 = 1 \cdot \{3A \cdot 0 + 3B \cdot 1 + A \cdot 1 - B \cdot 0\} + 2$

$0 = 3B + A + 2 = 3 \cdot 2 + A + 2 \Rightarrow \boxed{A = -8}$ 1/2

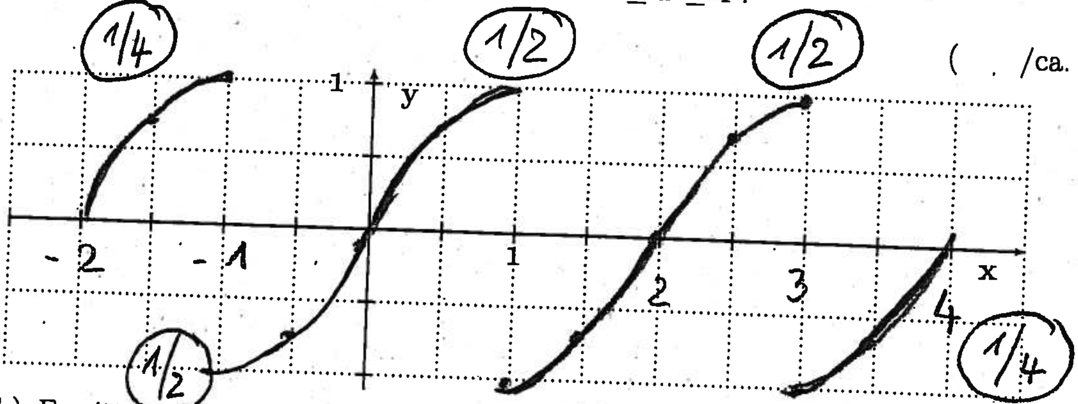
$y_{ges} = 2e^{3x}\{-4 \cdot \sin(x) + \cos(x)\} + e^{2x}$ 1/2

4. **Aufgabe: Fourierreihen** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sei die periodische Funktion mit der Periode $T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ x(2-x) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ \text{period.} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-2 \leq x \leq 4$. (/ca. 2)



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten (a_0, a_n, b_n). **Beachten Sie hierbei die Symmetrie!** (/ca. 6)

Fkt ungerade $\left(f(-x) = -f(x)\right)$ 1

$\Rightarrow a_0 = 0 \quad \& \quad a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot 2x}{T}\right) dx = 2 \int_0^1 x(2-x) \cdot \sin(n\pi x)\, dx$$ 1/2

$$= 2\left\{ 2\int_0^1 x \cdot \sin(n\pi x)\, dx - \int_0^1 x^2 \cdot \sin(n\pi x)\, dx \right\}$$ 1/2

$$= 2 \cdot \left\{ 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} - \frac{x \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 \right.$$ 1/2

$$\left. - \left[\frac{2x \cdot \sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} - \frac{\left[(n\pi)^2 \cdot x^2 - 2\right] \cos(n\pi x)}{(n\pi)^3} \right]_0^1 \right\}$$

1/2

$$b_n = 2 \cdot \left\{ 2\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \right] + \frac{\left[(n\pi)^2 - 2\right]\cos(n\pi)}{(n\pi)^3} + \frac{2 \cdot \cos 0}{(n\pi)^3} \right\} \quad 1$$

$$= -\frac{4\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{4\cos(n\pi)}{(n\pi)^3} + \frac{4}{(n\pi)^3} \quad 1$$

0

$$= -\frac{2\cos(n\pi)}{(n\pi)} + \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \quad 1/2$$

$$= -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1 - (-1)^n\right] \quad 1/2$$

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 2. Glied $F_2(x)$ an. (/ca. 2)

$$n = 1 \Rightarrow b_1 = +\frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^3} \quad 1/2$$

0 1/2

0

$$n = 2 \Rightarrow b_2 = -\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2\pi^3}\left[1 - (-1)^2\right] = -\frac{1}{\pi}$$

$$F_2(x) = \underbrace{\left(\frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^3}\right)\sin(1 \cdot \pi \cdot x)}_{1/2} \underbrace{- \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot x)}_{1/2}$$

5. **Aufgabe: Komplexe Zahlen (Überlagerung von Schwingungen)**
(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sind die zwei gleichfrequenten Schwingungen mit der Freguenz $\omega = 1$

$$s_1(t) = 3 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$s_2(t) = 4 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Diese 2 Schwingungen sollen überlagert werden, d.h. gesucht ist die Summenfunktion $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.
$s(t)$ ist wieder eine Sinusschwingung mit der Freguenz $\omega = 1$. In dieser Aufgabe soll die Lösung mit Hilfe von komplexen Zahlen bestimmt werden!
Rechnen Sie mit 6 Nachkommastellen.

(a) Formen Sie $s_1(t)$ und $s_2(t)$ in ihre jeweils komplexe Form $\underline{s_1}(t)$ und $\underline{s_2}(t)$ um und berechnen Sie komplexen Amplituden
$\underline{A_1}$ $(= \underline{s_1}(t = 0))$ und $\underline{A_2}$ $(= \underline{s_2}(t = 0))$ in kartesischer Darstellung.

(/ca. 3)

$z_1(t) = 3 \cdot e^{j(t+\pi/3)} = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right) + 3j\sin\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$ 1/2

$A_1 = 3e^{j\pi/3} = 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\cdot j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 1/2

$= 1{,}5 + 2{,}5980762j$ 1/2

$z_2(t) = 4\cdot e^{j(\pi/6+t)} = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}+t\right) + 4j\sin\left(\frac{\pi}{6}+t\right)$ 1/2

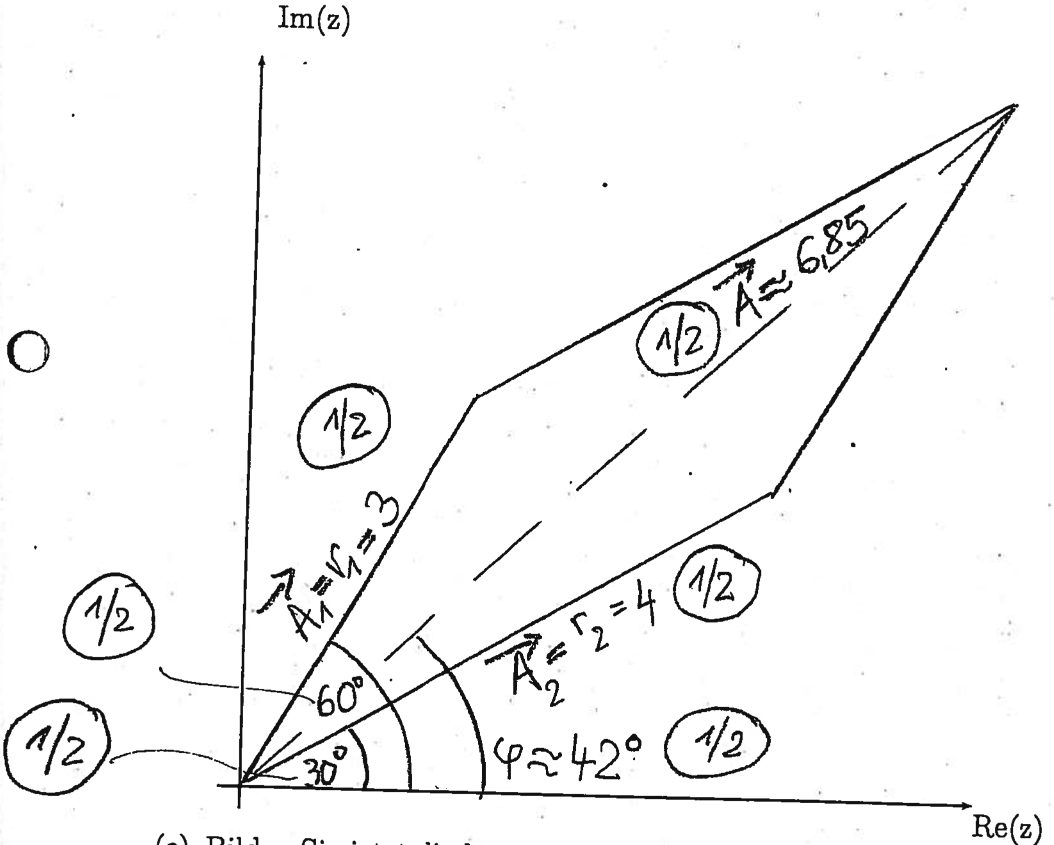
$A_2 = 4\cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cdot j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 1/2

$= 3{,}4641016 + 2j$ 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Überlagerung von Schwingungen

(b) Zeichnen Sie in die komplexe Ebene die komplexen Amplituden $\underline{A_1}$ $(= \underline{s_1}(t=0))$ und $\underline{A_2}$ $(= \underline{s_2}(t=0))$ **(2 cm $\hat{=}$ 1 LE)**.
Bilden Sie grafisch die komplexe Amplitude $\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2}$ der Summenfunktion $\underline{s}(t)$. Lesen sie den Betrag r und den Phasenwinkel φ aus der Zeichnung ab.

(/ca. 3)



(c) Bilden Sie jetzt die komplexe Summenfunktion $\underline{s}(t) = \underline{s_1}(t) + \underline{s_2}(t)$ unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus (a). Transformieren Sie dann $\underline{s}(t)$ in die reelle Sinusschwingung $s(t)$.

(/ca. 4)

$\vec{s}(0) = \vec{s}_1(0) + \vec{s}_2(0)$ 1/2

$= (1{,}5 + 3{,}4641016) + (2{,}5980762 + 2)j$ 1/2

$= 4{,}9641016 + 4{,}5980762\, j$ 1/2

$A = \sqrt{4{,}9641016^2 + 4{,}5980762^2} = 6{,}7664326$ 1/2

$\varphi = \arctan \dfrac{4{,}5980762}{4{,}9641016} \Rightarrow \varphi = 42{,}808°$ bzw $\varphi = 0{,}7471384$ rad 1/2

$z(t) = 6{,}76643226 \cdot e^{j(0{,}7471384 + t)}$ 1/2

1

Sinus-Schw.: $\mathrm{Im}(z(t)) = s(t) = 6{,}766432(6) \cdot \sin(0{,}747 + t)$

6. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 10 Punkte)

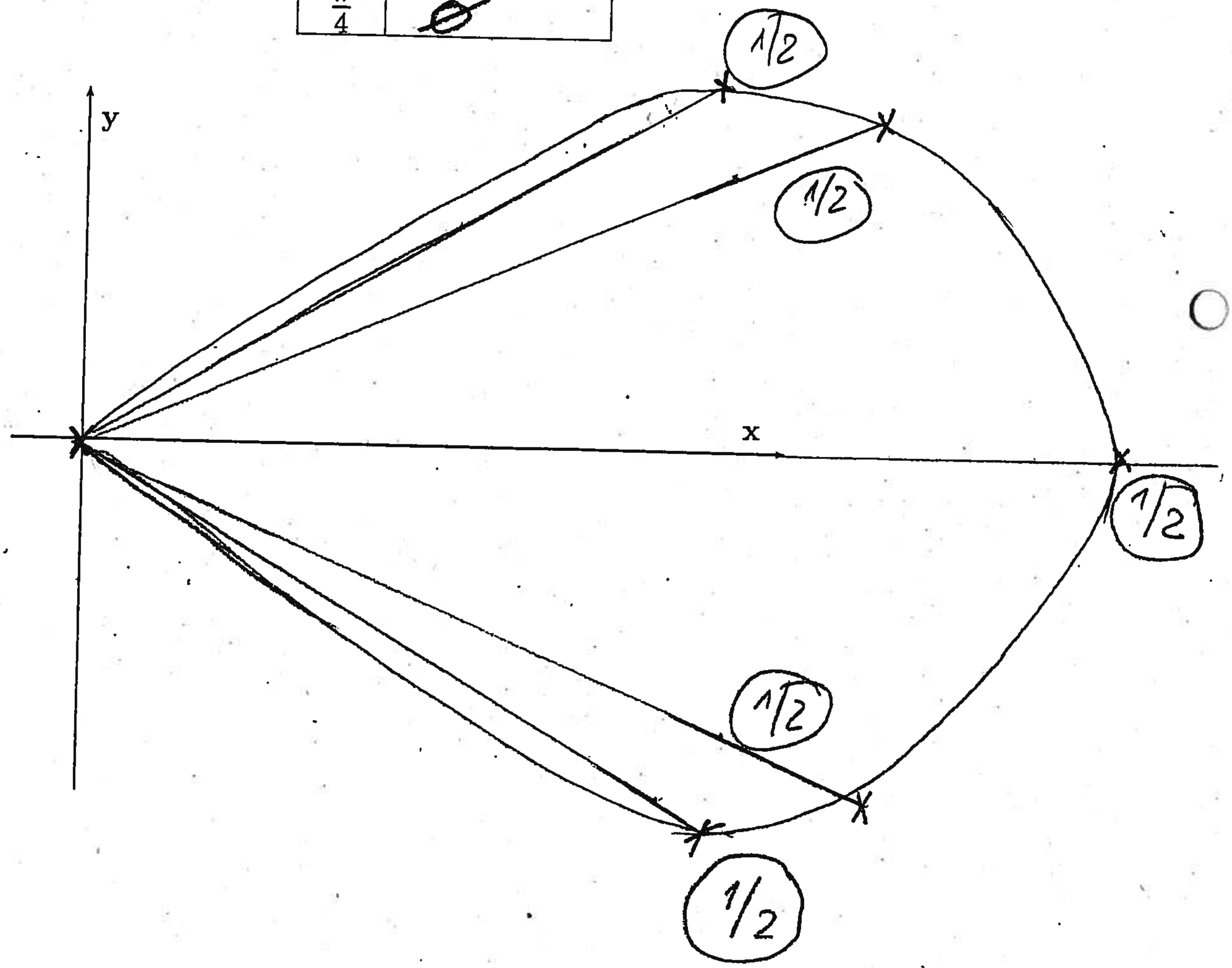
Gegeben ist die ebene Kurve in Polarkoordinatendarstellung die sogenannte Lemniskate (Spezialfall der Cassinischen Kurven).

$$r(\varphi) = a\sqrt{2\cos(2\varphi)} \text{ mit } \cos(2\varphi) \geq 0$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle und skizzieren Sie die Kurve für $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$, mit $a = 1$. (**1 cm $\widehat{=}$ 0,2 LE**)

(/ca. 4,5)

φ	$r(\varphi)$	
$-\frac{\pi}{4}$	$\emptyset$	1/2
$-\frac{\pi}{6}$	1	1/2
$-\frac{\pi}{8}$	1,1892	1/2
0	$\sqrt{2} = 1{,}4142$	1/2
$\frac{\pi}{8}$	1,1892	
$\frac{\pi}{6}$	1	
$\frac{\pi}{4}$	$\emptyset$	



Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Berechnen Sie die Sektorfläche der Lemniskate im Intervall $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ mit $a = 1$

(/ca. 1,5)

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} 2\cos(2\varphi)d\varphi \quad 1/2 \quad 1/2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{1}{2}\left(1-(-1)\right) = 1 \quad 1/2$$

(c) Berechnen Sie $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$.

(/ca. 1)

0

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{(-\cancel{2}\cdot\sin(2\varphi))}{\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)}} = -\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)}}$$

(d) Zeigen Sie, dass Darstellung der Lemniskate in kartesischen Koordinaten lautet:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

unter Benutzung von $x = r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$, $y = r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)$.

(/ca. 3)

$$x = r\cdot\cos\varphi = a\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{2\cos(2\varphi)} \quad 1/2$$

0 $$y = r\cdot\sin\varphi = a\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{2\cos(2\varphi)} \quad 1/2$$

$$(x^2+y^2)^2 = \left\{a^2\cos^2\varphi\cdot 2\cos(2\varphi) + a^2\sin^2\varphi\cdot 2\cos(2\varphi)\right\}^2$$

$$= 4a^4\cdot\cos^2(2\varphi) \quad 1/2 \quad 1/2$$

$$2a^2(x^2-y^2) = 2a^2\left\{a^2\cos^2\varphi\cdot 2\cos(2\varphi) - a^2\sin^2\varphi\cdot 2\cos(2\varphi)\right\}$$

$$= 2a^4\cdot 2\cos(2\varphi)\cdot\left\{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right\} \quad 1/2$$

1/2 $$= 4a^2\cos^2(2\varphi)$$ q.e.d.