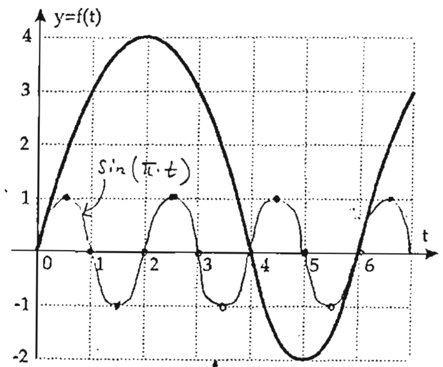
**Aufgabe 6:** Gegeben ist der Graph $G_f$ der periodischen Funktion $y = f(t)$ mit der Periode $T = 6$ (Die Geraden $t = 2$ und $t = 5$ sind Symmetrieachsen von $G_f$; siehe Skizze).




a) Ermitteln Sie mit Hilfe der SIMPSON-schen Formel zur Schrittweite $h = 1$ eine *Näherung* $S$ des konstanten Koeffizienten $\frac{a_0}{2}$ der Fourier-Reihe von $f(t)$.

Falls $a_0$: und (v)

$$S = \frac{1}{T} \cdot \frac{h}{3} \cdot \left[y_0 + 4\cdot(y_1+y_3+y_5) + 2\cdot(y_2+y_4) + y_6\right]$$

(1) auf $n = 6$ spez.

Skizze oder

$$= \frac{1}{6\cdot 3} \cdot \left[0 + 4\cdot(3+3+(-2)) + 2\cdot(4+0)\right] = \frac{1}{18}\left[16+8\right] = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$ (1) (2)

| $t = \tau$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | -2 | 0 |

(4)

b) Zeichnen Sie den *Graphen* von $y = \sin(\pi \cdot t)$ in die Skizze ein. (1)

c) Ermitteln Sie ohne Rechnung den *Fourier-Koeffizienten* $b_3$ von $f(t)$. (3) ~~ohne Begr.~~

$$b_3 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\cdot \sin\left(3\cdot \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{=\omega} \cdot t\right) dt =$$ (1), Rest (2)

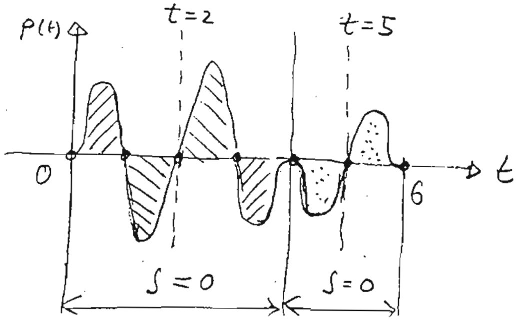
$$= \frac{1}{3}\cdot \int_0^6 \underbrace{f(t)\cdot \sin(\pi \cdot t)}_{=p(t)} dt = \frac{1}{3}\cdot\left[\int_0^4 p(t)\,dt + \int_4^6 p(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[0+0\right] = 0 \,,$$ da: Skizze ⇒

$p(2-\tau) = -p(2+\tau)$, d.h. $p(t)$ "ungerade" bzgl. $t=2$

$p(5-\tau) = -p(5+\tau)$, $t=5$

Produkt




| | |
|---|---|
| 5 | 1 – 13 |
| 4 | 14 – 20 |
| 3 | 21 – 27 |
| 2 | 28 – 34 |
| 1 | 35 – 43 |

→ Schw.

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 1998

VORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, kein Taschenrechner
Aufgabensteller: Axt, Plöchinger, Schwägerl, Vinzenz

| Name: Vorname: | Geb.-Datum: Stud.-Gruppe: | Punkte: Korr.: |
|---|---|---|
| Raum/Platz-Nr.: | Aufsicht: | Note: |

**Aufgabe 1:** Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$. Ermitteln Sie

a) die *Ableitung* $y' = f'(x)$,

$$y' = \frac{1\cdot \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$$ (1)

b) die *Grenzwerte* $y_0 = \lim_{x\to 0} f(x)$ und $y_0' = \lim_{x\to 0} f'(x)$,

$$y_0 \underset{L'H}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$ (1)

$$y_0' \underset{L'H}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1\cdot(1+x)-x}{(1+x)^2}}{2\,\ln(1+x)\,\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{2\cdot\ln(1+x)} \underset{L'H}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}}$$ (2) (3)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{2}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$ (1) (1)

c) die *Tangente* $t$ des Graphen von $y = f(x)$ bei $x = 0$ und den *Schnittpunkt* $T(x_T, 0)$ von $t$ mit der $x$-Achse. (2)

$$t: y = y_0 + y_0'\cdot(x - x_0) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$x_T = -2$$

**Aufgabe 2:** Die ebene Kurve $C$ hat die Parameterform $x = \frac{1}{t} + t$ und $y = \frac{1}{t} - t$ mit $t > 0$. Ermitteln Sie

a) die *Steigung* $\frac{dy}{dx}$ von $C$ in den Kurvenpunkten $S$ und $P$ bei $t = 1$ und $t = \frac{1}{2}$, (3)

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{-\frac{1}{t^2}-1}{-\frac{1}{t^2}+1} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\dot x = -\frac{1}{t^2}+1$, $\dot y = -\frac{1}{t^2} - 1$

(1) in $S(2, 0)$: $\frac{dy}{dx} = \infty$, $\dot x = 0$, $\dot y = -2$, $t = 1$

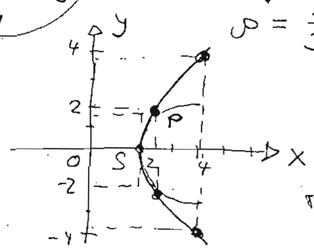
(1) in $P(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$, $\dot x = -3$, $\dot y = -5$, $t = \frac{1}{2}$

b) den *Krümmungsradius* $\rho$ von $C$ in $S$. $\quad t = 1$ (2)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \dot{y}\cdot\ddot{x}}{\left[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right]^{3/2}} = \frac{2\cdot 0 - (-2)\cdot 2}{\left[0^2 + (-2)^2\right]^{3/2}} = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{NR:} \quad \underbrace{\ddot{x} = \frac{2}{t^3} = \ddot{y} \underset{t=1}{=} 2}_{1} \qquad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \underline{\underline{2}} \quad \boxed{1}$$

| $t$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 4 | $1/4$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | $5/2$ | $4\,1/4$ | $4\,1/4$ | $5/2$ |
| $y$ | 0 | $3/2$ | $-3\,3/4$ | $3\,3/4$ | $-3/2$ |
| $y'$ | $\infty$ | $5/3$ | | | |



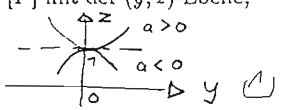
c) *Skizzieren Sie* $C$ für $\frac{1}{4} \le t \le 4$. (2)

**Aufgabe 3**: Sei $z = F(x,y) = a\cdot(x^2 - y)^2 + (x-1)^2$ mit $a = \text{const} \ne 0$ die Gleichung einer Fläche $[F]$. Ermitteln Sie

a) Gleichung und Skizze der *Schnittkurve* $P$ von $[F]$ mit der $(y,z)$-Ebene, (2)

$P: z = a\cdot y^2 + 1$ $\quad$ 1+1

$x = 0$ in $[F]$ – GL $\boxed{1}$



b) die *Koordinate* $x_P$ so, daß die Tangentialebene $\tau$ von $[F]$ im Punkt $P(x_P, 1, z_P)$ parallel zur $(x,y)$-Ebene ist, (3)

$F_x = 2a\cdot(x^2 - y)\cdot(2x) + 2(x-1) = 0 \Rightarrow x_P = 1$ $\boxed{1}$

$F_y = 2a\cdot(x^2 - y)\cdot(-1) = 0 \Rightarrow x_P = \pm 1$ $\boxed{1}$ $\quad y_P = 1$

$x(x^2-1) + 2(x-1) = 2(x-1)[\cdot 2ax(x+1)+1] = 0, \quad 2ax^2 + 2ax + 1 = 0: x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{a}$ ! (bei $a = -1$ also auch Lös: $x = -1 \pm \sqrt{3}$ f. $F_x = 0$)

$x_P = 1$ $//$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow z_P = F(x_P, y_P) = 0$

c) die *Art* von $P$ (Extremum oder Sattelpunkt von $[F]$) bei $a = 1$ und $a = -1$. (4)

max $\boxed{2}$
$$\left\{\begin{aligned} F_{xx} &= \left[4a\cdot(x^3 - xy)\right]_x + 2 = 4a\cdot(3x^2 - y) + 2 \underset{\text{in } P}{=} 8a + 2 \\ F_{xy} &= F_{yx} = -4ax \underset{\text{in } P}{=} -4a, \quad F_{yy} = 2a \end{aligned}\right.$$

$\boxed{1}$ $a = 1$: $D = F_{xx}\cdot F_{yy} - (F_{xy})^2 = 10\cdot 2 - (-4)^2 = 4 > 0$

$F_{xx} = 10 > 0 \Rightarrow P$ <u>Minimum</u>

$\boxed{1}$ $a = -1$: $D = F_{xx}\cdot F_{yy} - (F_{xy})^2 = (-6)\cdot(-2) - (4)^2 = -4 < 0$

$\Rightarrow P$ <u>Sattelpunkt</u>

**Aufgabe 4**: Durch $r = 1 + \cos\phi$ mit $0 \le \phi \le \pi$ ist eine ebene Kurve $C$ in Polarkoordinaten gegeben.

a) Berechnen Sie die *Bogenlänge* $s$ von $C$. Hinweis: $1 + \cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2}$. (4)

$$s = \int_{\varphi=0}^{\pi} \sqrt{(\dot{r})^2 + r^2}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi \quad \boxed{1}$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1} + 1 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi \quad \boxed{1}$$

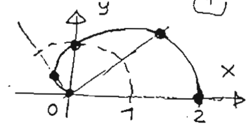
$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \int_0^{\pi} \sqrt{4\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2\cdot\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \quad \boxed{1} =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_{\varphi=0}^{\pi} = 4\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{4}} \quad \boxed{1}$$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

b) *Skizzieren Sie* $C$. (2)

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | 2 | 1 | 0 | 1.7 |



**Aufgabe 5**: Ermitteln Sie die *Lösung* $y = \phi(x)$ der Differentialgleichung $y'' = 2y\cdot(1+y^2)$ mit den Anfangsbedingungen $y = 0$ und $y' = 1$ bei $x = 0$. Hinweis: Substituieren Sie $v = y'$ und fassen Sie $v$ als Funktion von $y$ auf.

$$\frac{dv}{dy}\cdot v = \frac{dv}{dx} = y'' = f(y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(y)}{v} = \frac{2y(1+y^2)}{v} \quad \text{separabel} \Rightarrow \quad (1)$$

$\boxed{1}$ $\frac{v^2}{2} + C_1 = \int v\,dv = \int 2y(1+y^2)\,dy = y^2 + \frac{2}{4}\cdot y^4 \Rightarrow$

$\boxed{1}$
$$\left\{\begin{aligned} &v = \pm\sqrt{2y^2 + y^4 + K} \quad \left(\text{nach FS } \pm\sqrt{2\cdot F(y) + k} : F(y) = \int f(y)\,dy\right) \\ &AB: \; y = 0,\; v = 1 \text{ bei } x = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ und } +\sqrt{\cdots} \Rightarrow \end{aligned}\right.$$

$\boxed{1}$ $\frac{dy}{dx} = v = +\sqrt{2y^2 + y^4 + 1} = +\sqrt{(y^2+1)^2} = y^2 + 1$ (3)

$\Downarrow$

$\boxed{1}$ $\arctan y = \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx = x + C \Rightarrow y = \tan(x + C)$

$AB: \; y = 0$ bei $x = 0 \Rightarrow 0 = \tan C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\boxed{1}$ Lösung $y = \underline{\underline{\tan x}}$ (2)