10

Aufgabe 4: Eine Flüssigkeit strömt in z-Richtung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt in der (x, y)-Ebene. Der Querschnitt hat den Radius $R = 5$. Die Strömungsgeschwindigkeit in einem Querschnittpunkt $P(x, y)$ ist

$$v = v^* \cdot \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) \quad \text{mit} \quad v^* = const$$

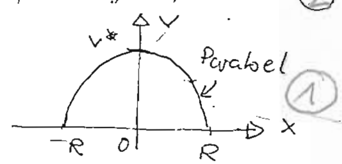
a) Welche Geschwindigkeit v hat man im Rohrzentum $O(0,0)$ und im Punkt $P(3,4)$? 2

$v(O) = v^* \cdot (1-0) = v^*$ 1 $\quad v(P) = v^*\left(1 - \frac{9+16}{25}\right) = 0$ 1

b) Skizzieren Sie die Geschwindigkeit v in der (x, v)-Ebene, d.h. bei $y = 0$, 2

$y = 0 \Rightarrow v = v^* \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ 1

x	0	$\pm R$
v	v^*	0



1

c) zeigen Sie: der ebene Bereich, der von der Kurve $v = c = const$ umschlossen wird, hat den Inhalt $A(c) = \pi R^2 \cdot \left(1 - \frac{c}{v^*}\right)$. 3

1

$$v = c \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{c}{v^*} \Leftrightarrow 1 - \frac{c}{v^*} = \frac{x^2+y^2}{R^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = r^2 := R^2\left(1 - \frac{c}{v^*}\right) \Leftrightarrow \text{Kreis mit Radius } r$$ 1

$$\Rightarrow A(c) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{c}{v^*}\right)$$ 1

d) Berechnen Sie die sekundliche Durchflußmenge $Q = \int\limits_0^{v^*} A(c)\, dc$, 1 2

$$Q = \int_0^{v^*} \pi \cdot R^2 \left(1 - \frac{c}{v^*}\right) dc = \pi \cdot R^2 \left[c - \frac{c^2}{2v^*}\right]_{c=0}^{v^*}$$

$$= \pi \cdot R^2 \cdot \left[\left(v^* - \frac{v^{*2}}{2v^*}\right) - 0\right] = \underline{\underline{\pi \cdot R^2 \cdot \frac{v^*}{2}}}$$ 1

e) wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \dfrac{Q}{A(0)}$? 1

$$\underline{\underline{\bar{v} = \frac{v^*}{2}}}, \text{ da}$$ 1

$$A(0) = \pi \cdot R^2$$

Endversion bitte wegen Punktevergabe zur Prüfung mitnehmen. mfG E.P.

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN — FACHBEREICH 03 FA — SS 1999

VORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller:	Axt, Kloster, König, Plöchinger, Radtke, Schwägerl

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**

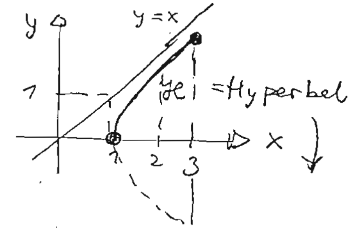
Name: Noname Vorname: Mu Lö	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

11

Aufgabe 1: Sei $y = \sqrt{x^2 - 1}$ mit $x \in [1, 3]$ die Gleichung einer Kurve $\mathcal{H}$ in der (x, y)-Ebene. Wenn der von $\mathcal{H}$, der x-Achse und der Geraden $x = 3$ eingeschlossene Bereich um die x-Achse rotiert, entsteht ein Drehkörper mit dem Volumen V und dem Mantelflächeninhalt A.

a) Skizzieren Sie $\mathcal{H}$, 2

x	1	2	3
y	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$



b) berechnen Sie V, 1 3

$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2 dx = \pi \cdot \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3$$ 1

$$= \pi \cdot \left[\left(\frac{27}{3} - 3\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \underline{\underline{\pi \cdot 6{,}66\ldots}}$$ 1

c) begründen Sie die Formel $A = 2\pi \int\limits_1^3 \sqrt{2x^2 - 1}\, dx$, 1 3

$$A = 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}\, dx$$ 1

$$= 2\pi \cdot \int \sqrt{(x^2-1) + x^2}\, dx = 2\pi \cdot \int_1^3 \sqrt{2x^2 - 1}\, dx$$ 1

d) ermitteln Sie die SIMPSON-Näherung S von A bei der Schrittweite $h = 1$. 1 3

$$S = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[z_0 + 4z_1 + z_2\right] = \frac{2\pi}{3}\left[1 + 4\sqrt{7} + \sqrt{17}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot 15{,}7\ldots = \underline{\underline{32{,}884\ldots}}$$ 1

$$z \doteq \sqrt{2x^2 - 1} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_0 &= z(1) = 1 \\ z_1 &= z(2) = \sqrt{7} \\ z_2 &= z(3) = \sqrt{17} \end{aligned}\right\}$$ 1

9

Aufgabe 2: Gegeben sei die DGL $y'' - y = b(x)$.

a) Ermitteln Sie die *allgemeine Lösung* y_h der dazugehörigen *homogenen* DGL.

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$ (1)

$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$ homogene Lsg'en

$y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ (1) (2)

b) Welchen Ansatz für eine *partikuläre Lösung* y_p der DGL macht man bei (3)

(1) $b(x) = x^2 \cdot e^{3x}$, (2) $b(x) = 2(1-2x) \cdot e^x$, (3) $b(x) = e^{-x} \cdot \cos x$?

(1) (1) $y_p = (A + Bx + Cx^2) \cdot e^{3x}$, (e^{3x} keine homog. Lsg)

(1) (2) $y_p = x \cdot (A + Bx) \cdot e^x$, da e^x = 1fache homog. Lsg

(1) (3) $y_p = (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) \cdot e^{-x}$, (ebenfalls keine homog. Lsg)

Sei jetzt $y_p = (2x - x^2) \cdot e^x$ eine *partikuläre Lösung* der DGL. Ermitteln Sie hierzu

c) die *spezielle Lösung* der DGL mit $y = 1$ und $y' = 5$ bei $x = 0$.

$y = (C_1 + 2x - x^2) \cdot e^x + C_2 e^{-x} \Rightarrow$

$y' = ((C_1 + \cancel{2x} - x^2) + (2 - \cancel{2x}))e^x - C_2 e^{-x}$ (1) $\Rightarrow$ bei $x = 0$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \overset{!}{=} y(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = 1 - C_2 = 2 \\ 5 \overset{!}{=} y'(0) = (C_1 + 2) - C_2 = 3 - 2C_2 \Rightarrow C_2 = -1 \end{array} \right.$

$y = \underline{\underline{(2 + 2x - x^2)e^x - e^{-x}}}$ (1) (4)

Pkte	≥ 37	$30 \leq x \leq 36$	$23 \leq x \leq 29$	$16 \leq x \leq 22$	$x \leq 15$
Note	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

11

Aufgabe 3: Gegeben sei die DGL $y' = 2xy$. Ermitteln Sie

a) die *exakte* Lösung y der DGL mit $y = 1$ bei $x = 0$,

$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x$ (1) $\overset{\int}{\Rightarrow} \ln y = x^2 + C \Rightarrow$

$y = e^{x^2 + C}$ (1) $\underset{y(0)=1}{\Rightarrow} C = 0$ (1)

$y = \underline{\underline{e^{x^2}}}$ (3)

b) eine RUNGE-KUTTA-Näherung y^* für y bei $x = 1$. Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = 0$ und die Schrittweite $h = 1$. $f(x,y) = 2xy$

$(x,y)_I = (0,1) \Rightarrow k_1 = h \cdot f_I = 0$ (1)

$(x,y)_{II} = (0 + \frac{h}{2}, 1 + \frac{k_1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow k_2 = h \cdot f_{II} = 1$ (1)

$(x,y)_{III} = (0 + \frac{h}{2}, 1 + \frac{k_2}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow k_3 = h \cdot f_{III} = 3/2$ (1)

$(x,y)_{IV} = (0 + h, 1 + k_3) = (1, \frac{5}{2}) \Rightarrow k_4 = h \cdot f_{IV} = 5$ (1) $\Rightarrow$

$y^* = y_0 + \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6} = 1 + \frac{0 + 2(1 + 3/2) + 5}{6} = 1 + \frac{10}{6}$

$y^* = \underline{\underline{\frac{16}{6} = 2{,}666\ldots}}$ (1) (5)

c) Die MACLAURIN-Reihe $T_6(x)$ von y bis einschließlich Term x^6 , $t = e^x$

$y = e^{x^2} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$ (1)

$= 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + \ldots \Rightarrow$

$T_6(x) = \underline{\underline{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}}}$ (1) (2)

d) die Differenz $y^* - T_6(1) =$ 0 (1)

$T_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{4}{6} = 2{,}666$ (1)