FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 00/01

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Axt, Gröger, Kloster, Plöchinger, Radtke, Schwägerl

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: Ermitteln Sie von der Funktion $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ die
a) Ableitungen y' und y'', b) Extrema, c) Wendepunkte,
d) Gleichung der Tangente t bei $x = 1$, e) Krümmung κ bei $x = 0$ und $x = 1$ und
f) zeichnen Sie die Tangente t, den Krümmungskreis bei $x = 0$ und den Funktionsgraphen.

Aufgabe 2: Bei einem Gewinde kann man die Ganghöhe h und den schrägen Kerndurchmesser D messen.
a) Drücken Sie den wahren Kerndurchmesser d formelmäßig durch D und h aus,
b) begründen Sie die Näherungsformel $d \approx D - \frac{h^2}{8D}$ bei $h \ll D$ und
c) berechnen Sie d exakt und näherungsweise bei $D = 10$ mm und $h = 4$ mm.

Aufgabe 3: (Fr. Kloster) Sei $z = f(x,y) = x^2 - 6x - y^2 + 10$ die Gleichung einer Fläche $\mathcal{F}$. Ermitteln Sie Gleichung und Skizze der Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit der
a) Ebene der Höhe $z = 1$, b) (x,z)-Ebene sowie
c) die Extrema oder Sattelpunkte K von $\mathcal{F}$,
d) die Gleichung der Tangentialebene τ von $\mathcal{F}$ in $A(1,1,z_0)$.
e) Liegt der Punkt $T(3,-2,-12)$ auf τ?

Aufgabe 4: Sei $y = f(x)$ eine *ungerade* Funktion der Periode 2π mit $y = \cos x$ für $x \in (0,\pi)$.
a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in (-\pi, 3\pi)$ und ermitteln Sie
b) den mittleren Funktionswert $\overline{y}$,
c) alle Fourier-Koeffizienten a_n und b_1, b_2 und b_3,
d) das Fourier-Polynom $F_3(x)$ der Ordnung 3.

Aufgabe 5: (Hr. Gröger) Ermitteln Sie von der Differentialgleichung $(x^2-1)\cdot y' = x\cdot(y^2-2y)$
a) alle Lösungen der Art $y = K =$ konstant, b) die allgemeine Lösung und
c) die Lösung mit $y = \frac{1}{2}$ bei $x = 2$.

Liebe Kollegen,

anbei die Mathe-Prüfung für FA. Anmerkungen hierzu schicken Sie mir bitte spätestens in der 2. Januarwoche, da ich die Prüfung dann in die Druckerei gebe.

Ein frohes Fest und einen guten Rutsch in's neue Jahr, wünscht Ihnen E. Plöchinger.

A1

$$\boxed{y = e^{-\frac{x^2}{2}}} \Rightarrow$$

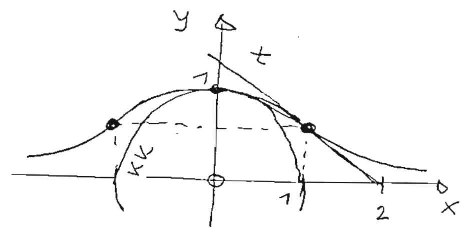
a): $y' = -x\cdot y$ 1, $y'' = -y + (-x)\cdot y' = y\cdot(x^2-1)$ 1

b) Extrema: $y' = 0 \Rightarrow_{y\neq 0} x = 0 \Rightarrow y = 1$ 1

c) WP: $y'' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 2 $\Rightarrow y = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0{,}605$

f) Skizze:

x	0	1
y	1	$e^{-1/2}$
y'	0	$-e^{-1/2}$
y''	-1	0



d) Tangente t bei $x = 1$: $x_0 = 1$, $y_0 = e^{-1/2}$, $y' = -e^{-1/2}$

$t: y = y_0 + y'\cdot(x - x_0) = e^{-1/2}\cdot[1 - (x-1)] = e^{-1/2}\cdot[2-x]$ 2

e) $\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$ 1 bei $x = 0$: $\kappa = \frac{-1}{[1+0^2]^{3/2}} = -1 \Rightarrow \rho = -1$

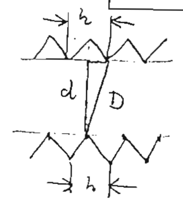
$x = 1$: $\kappa = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

KK = Kreis um $O(0,0)$ mit Radius $r = 1$

A2

a): Skizze $\Rightarrow D^2 = d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow$ 1

$d = \sqrt{D^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = D\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2D}\right)^2}$ 1



b): $h \ll D \Rightarrow d \underset{a)}{\overset{\text{Taylor}}{\approx}} D\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2D}\right)^2\right]$ 2 $= D - \frac{h^2}{8D}$

c): $h = 4$ mm, $D = 10$ mm $\Rightarrow$

$d = 10\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{4}{20}\right)^2} = 10\cdot\sqrt{1-0.04} = 10\cdot\sqrt{0.96} = \underline{9.7979}$ mm

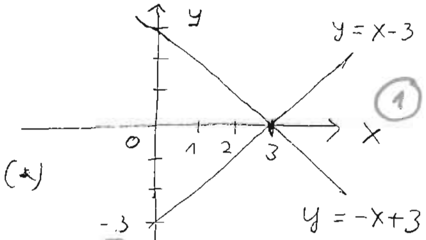
$\tilde{d} = 10 - \frac{16}{4\cdot 10} = 10 - 0{,}2 = \underline{9{,}8}$ mm

A3

$\mathfrak{F}: \boxed{z = x^2 - 6x - y^2 + 10 = f(x,y)}$

a) $\mathfrak{F} \cap (z=1)$-Ebene: $z = 1 \overset{\checkmark}{\Leftrightarrow} (x-3)^2 = y^2$ (1) Quadr. Ergänz. $\Rightarrow$

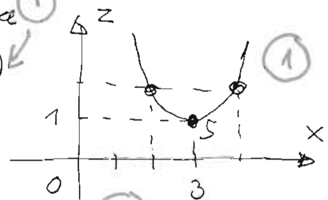
$y = \pm (x-3)$ $\quad y = x-3$ (1) $\quad y = -x+3$ (1)



b) $\mathfrak{F} \cap (x,z)$-Ebene: $y = 0$ in $(*)$ (1)

$z = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ = Parabel (1) mit Scheitel $S(3,1)$ nach oben offen

x	3	2	4	1
z	1	2	2	5



c): (1) $\left\{\begin{array}{l} f_x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ f_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ (1) $\quad K(3,0,1) =$ kritischer Pkt (1)

(2) $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpkt

d): TE τ von $\mathfrak{F}$ in $A(1,-1,z_0)$: $z_0 = f(1,1) = 4$ (1)

$f_x = 2 - 6 = -4$ (1), $f_y = +2 \Rightarrow$

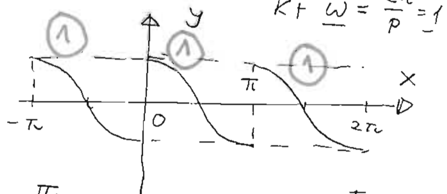
$\tau: \underline{\underline{z}} = 4 - 4(x-1) + 2 \cdot (y-2) = \underline{\underline{4 - 4x + 2y}}$ (1)

e): $T(3,-2,-12) \in \tau$ ✓

A4

$y = \cos x$ in $(0, \pi)$ ungerade & "2π-periodisch" $\quad$ KF $\omega = \frac{2\pi}{p} = 1$

a) Skizze:



b): $y = f(x)$ ungerade $\Rightarrow \bar{y} = 0$

c): $\underline{\underline{a_n \equiv 0}}$, da $f(x)$ ungerade $\Rightarrow$

$\underline{\underline{b_n}} = \frac{4}{p} \cdot \int_{x=0}^{p/2} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} \cos x \cdot \sin(nx)\, dx \overset{FS}{=}$ (1)

(1)

$= \frac{-2}{2\pi} \cdot \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_{x=0}^{\pi} \overset{\cos(k\pi) = (-1)^k}{=} \frac{-1}{\pi} \left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1} \right]$

$= \frac{1+(-1)^n}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right] = \frac{1+(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n}{n^2-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{n}{n^2-1}, & n = 2,4,6,\dots \\ 0, & n = 1,3,5,\dots \end{cases}$ (1)

$= \frac{4}{\pi} \cdot \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{6}{35}, \dots \right\}$ $\quad n = 2, 4, 6$

d): $F_3(x) = b_2 \cdot \cos(2x) = \frac{8}{3\pi} \cdot \cos(2x)$

A5

DGL $\boxed{(x^2-1) \cdot y' = xy \cdot (y-2)}$ $(*)$ (1)

a) Lsg $y = k = \text{konst}$: $\Rightarrow y' = 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} x \cdot k \cdot (k-2) = 0$

$\Rightarrow \underline{k = 0}$ (1) oder $\underline{k = 2}$ (1) möglich

b) allgem. Lsg: $\frac{dy}{dx} = y' \underset{(*)}{=} \frac{x}{x^2-1} \cdot y \cdot (y-2)$ (1) (1) trennen $\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y \cdot (y-2)} = \int \frac{x}{x^2-1}\, dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{y-(y-2)}{y \cdot (y-2)}\, dy = \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)}\, dx$

$\Rightarrow \int \left[\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right] dy = \int \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right] dx \Rightarrow \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = \ln(x^2-1) + k$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{y}\right) = C \cdot (x^2-1)$ (1) $\Rightarrow 1 - C \cdot (x^2-1) = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{2}{1 - C \cdot (x^2-1)}}}$ (1)

c) $\underline{\text{bei } x = 2}$ $\Rightarrow y = \frac{2}{1-3C} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow 4 = 1 - 3C \Rightarrow \underline{C = -1}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{1+(x^2-1)} = \frac{2}{x^2}$ // (1)