→ Fr. Kloster

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 01/02

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Plöchinger, Rast, Schwägerl

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

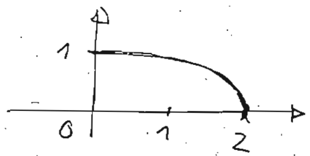
9

Aufgabe 1: Sei $y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ mit $x \in [0, 2]$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von $y = f(x)$ und berechnen Sie (2)

x	0	2
y	1	0

Ellipsen-Viertel



b) den Wert des bestimmten Integrals $I = \int_0^2 f(x)\,dx$ exakt, (2)

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \overset{FS}{=} \frac{1}{4} \cdot \left[x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=0}^{2} \quad (1)$$

$$= \operatorname{asin}(1) \underset{(1)}{=} \frac{\pi}{2} \;//\;, \text{ da } \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

c) eine Näherung Q von I nach der *Faßregel von Kepler*, (2)

$$Q = \frac{2-0}{6} \cdot \left[f(0) + 4 \cdot f(1) + f(2)\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[1 + 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + 0\right] \quad (1)$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3} = 1{,}48803\ldots \;//\; (1)$$

d) das *MacLaurin-Polynom* $T_4(x)$ von $y = f(x)$ bis zum Term $c_4 \cdot x^4$. (3)
Hinweis: Verwenden Sie die binomische Reihe.

$$\sqrt{1+h} \underset{(1)}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \ldots \quad \text{für } |h| < 1$$

$$h \mathrel{\dot=} -\frac{x^2}{4} \Rightarrow T(x) = 1 + \frac{-x^2/4}{2} - \frac{(-x^2/4)^2}{8} + \ldots \quad (1) \quad \text{MacL.-Reihe}$$

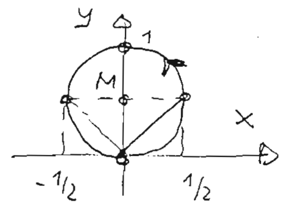
$$\Rightarrow T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{128} \;//\; \underline{\text{MacL.-Polynom}} \quad (1)$$

11

Aufgabe 2: Die ebene Kurve C hat in Polarkoordinaten die Formel $r = \sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, \pi]$.

a) Skizzieren Sie C und berechnen Sie ~~(2)~~ (3)

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
r	0	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



b) den *Inhalt* A der von C umschlossenen Fläche, (2)

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \underset{(1)}{\overset{FS}{=}} \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_{\varphi=0}^{\pi}$$

$$\underset{(1)}{=} \frac{\pi}{4} \;//$$

c) die *Länge* L von C . (2)

$$L \overset{FS}{=} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi \underset{(1)}{=} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} 1\,d\varphi = \pi \;//\; (1)$$

d) Zeigen Sie, daß C die *implizite Gleichung* $x^2 + y^2 = y$ hat. (2)

$$y = r \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{y}{r} \underset{\text{C-GL}}{\Rightarrow} r = \frac{y}{r} \Rightarrow$$

$$y = r^2 = x^2 + y^2$$

e) Ermitteln Sie die *Kurvenart* und die Bestimmungsgrößen von C . (3)

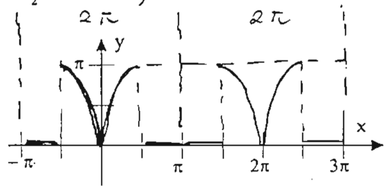
$$x^2 + y^2 = y \Leftrightarrow x^2 + \left(y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}y\right) = 0 \Leftrightarrow +\frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C \text{ } \underline{\text{Kreis}} \text{ um} \quad (2)$$

$$M\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ mit Radius} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Aufgabe 3: Sei $y = f(x) = \begin{cases} \pi \cdot \sin x \,, & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \,, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ eine *g e r a d e* Funktion der Periode 2π .

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in (-\pi, 3\pi)$ und ermitteln Sie von dieser Funktion 2 3



$$P = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 1$$

b) die *Fourier-Koeffizienten* a_0 und a_1 sowie b_n für $n = 1, 2, \cdots$, 5

$f(x)$ gerade $\Rightarrow b_n \equiv 0$ 1

$$a_n = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} f(x) \cdot \cos(n\omega x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$$

2 $$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 2 \cdot [-\cos x]_0^{\pi/2} = 2 \;//$$

2 $$a_1 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x\, dx = [\sin^2 x]_0^{\pi/2} = 1 \;//$$

c) das *Fourier-Polynom* $F_1(x)$ der Ordnung 1 . 1

$$F_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(1 \cdot x) = 1 + \cos x \;//$$

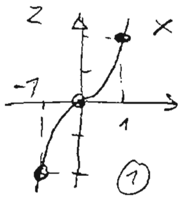
13

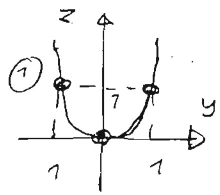
Aufgabe 4: Sei $z = f(x,y) = y^4 - 6xy^2 + 2x^3$ die Gleichung einer Fläche $\mathcal{F}$. Ermitteln Sie

a) Gleichung und Skizze der Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit der (x,z)- und der (y,z)-Ebene, 4

$\mathcal{F} \cap \{y = 0\}$: $z = 2x^3$ 1

$\mathcal{F} \cap \{x = 0\}$: $z = y^4$ 1





b) einen *Sattelpunkt* $S(x_0, y_0, z_0)$ von $\mathcal{F}$, 1

Skizze a) $\Rightarrow S(0, 0, z_0 = 0)$ Sattelpkt.

c) ein *Extremum* $E(x_1, y_1, z_1)$ von $\mathcal{F}$ mit $y_1 > 0$, 1 6 7

2 $$\begin{cases} f_x = -6y^2 + 6x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow |x| = |y| \quad (*) \\ f_y = 4y^3 - 12xy = 4y \cdot (y^2 - 3x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow^{y \neq 0} y^2 = 3x \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} x^2 = 3x \Rightarrow x = 3 \stackrel{(*)}{\underset{y>0}{\Rightarrow}} y = 3 \Rightarrow E(3, 3, -27)$$

1 1

$$\Delta := f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = \ldots > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$ 2

d) die Gleichung der *Tangentialebene* τ von $\mathcal{F}$ im Flächenpunkt $A(1, 1, z_2)$. 2

1 $$z_2 = f(1,1) = -3 \;,\; f_x = 0 \;,\; f_y = -8$$

1 $$\tau: \; z = -3 + 0 \cdot (x-1) - 8 \cdot (y-1) = 5 - 8y$$

7

Aufgabe 5: Ermitteln Sie die Lösung der DGL $y'' = -2x \cdot (y')^2$ mit den Anfangswerten $y = 0$ und $y' = 1$ an der Stelle $x = 0$. 7

3 $$\begin{cases} v := y' \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = v' = -2xv^2 \stackrel{\text{trennen}}{\Rightarrow} \\ -\dfrac{dv}{v^2} = 2x\, dx \stackrel{\int}{\Rightarrow} \dfrac{1}{v} = x^2 + C_1 \Rightarrow v = \dfrac{1}{x^2 + C_1} \end{cases}$$

1 1 1

1 AB: $x = 0 \Rightarrow 1 \stackrel{!}{=} v = \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{x^2 + 1}$

2 $$\frac{dy}{dx} = v = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x^2+1} \stackrel{\int}{\Rightarrow} y = \arctan x + C_2$$

1 1

1 AB: $x = 0 \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} y = \arctan 0 + C_2 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow y = \arctan x$$

Punkte:

1	2	3	4	5	Σ
9	10	9	14	7	48

Note:

5	0 – 19
4	20 –
3	27 –
2	34 –
1	41 – ~~48~~ 54