→ Fr. Kloster

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 02/03

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II (ANALYSIS)- FAHRZEUGTECHNIK -

02

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller:	Gröger, Kloster, Plöchinger, Pöschl, Stiefenhofer

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ für $-1 < x < 1$. Ermitteln Sie

a) das MacLaurin-Polynom $T_6(x)$ von $f(x)$ bis zum Term $c_6\, x^6$,

b) das Integral $S = \int_0^1 T_6(x)\, dx$, c) die Kepler-Näherung Q des Integrals $I = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Aufgabe 2: Sei $y = f(x)$ die Funktion der Periode 2π mit $y = A \cdot e^{-x}$ für $0 < x < 2\pi$ mit der Konstanten $A = \dfrac{\pi}{1-e^{-2\pi}}$. 3,14747

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in (-2\pi, 4\pi)$ und ermitteln Sie von dieser Funktion

b) den *Fourier-Koeffizienten* a_0 , c) die *Fourier-Koeffizienten* a_n für $n = 1, 2, \cdots$,

d) die *Fourier-Koeffizienten* b_n für $n = 1, 2, \cdots$, e) die *Fourier-Reihe* $F(x)$.

Aufgabe 3: Die Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$ einer ebene Kurve C seien in Parameterform gegeben durch $x = t \cdot \cos t$ und $y = \cos t$ mit $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie

a) die Steigung y' von C in einem Kurvenpunkt P , b) das Maximum $S(x_0, y_0)$ von C ,

c) den Inhalt A der von C umschlossenen Fläche,

d) die Krümmung κ von C im Punkt S . e) Skizzieren Sie C .

Aufgabe 4: Durch $y = 1$, $y = 2x - 1$ und $y = 5 - x$ seien drei Geraden in der (x, y)-Ebene gegeben, die sich in den Punkten P , Q und R schneiden.

a) Zeichnen Sie die drei Geraden, b) ermitteln Sie die Koordinaten von P , Q und R ,

c) zeigen Sie, daß $z = f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-4)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2$ die Summe der Abstandsquadrate eines beliebigen Punktes $M(x, y)$ zu P , Q und R ist.

d) Für welchen Punkt $M(x_0, y_0)$ ist $f(x, y)$ extremal? Beweisen Sie, daß dann ein Minimum vorliegt.

Aufgabe 5: Sei y die Lösung der DGL $y'' = f(y, y') = \dfrac{1-(y')^2}{y}$ mit $y = 1$ und $y' = 0$ bei $x = 0$.

a) Zeigen Sie, daß für die Ableitung $v = y'$ von y gilt $v = \pm \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$,

b) berechnen Sie die Lösung y und c) skizzieren Sie y .

Wo hat der Fehlerteufel zugeschlagen? Mit freundlichen Grüßen E. P.

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x^3}}$ für $-1 < x < 1$ -1- A1

a): $\sqrt{1+h} \overset{\text{Binomial-reihe}}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} \mp \ldots$ für $h = x^3$

$f(x) = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} \mp \ldots \Rightarrow \underline{\underline{T_6(x) = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8}}}$

b): $S := \int_0^1 T_6(x)\, dx = \left[x + \frac{x^4}{4\cdot 2} - \frac{x^7}{7\cdot 8}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 8}$

$= \frac{56+7-1}{56} = \underline{\underline{1{,}10714\ldots}}$

c):

x	0	$1/2$	1
y	1	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$

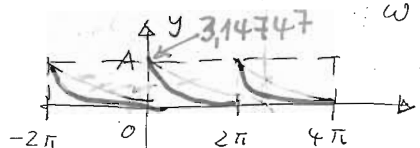
$\Rightarrow$

$Q = \frac{1}{6}\left[f(0) + 4\cdot f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right] = \frac{1}{6}\left[1 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2}\right] = \underline{\underline{1{,}10947\ldots}}$ 228

$\boxed{y = f(x) = A\cdot e^{-x}}$ für $x \in (0, 2\pi)$ sei 2π-periodisch A2

$\omega = 1$, $\pi < A = \frac{\pi}{1-e^{-2\pi}} =$ 3,14747

a):



b): $\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\, dx =$

$= \frac{A}{\pi}\cdot\left[-e^{-x}\right]_0^{2\pi} = \frac{A}{\pi}\left[1 - e^{-2\pi}\right] = 1 \,//$

c): $\underline{\underline{a_n}} = \frac{A}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} e^{-x}\cdot\cos(nx)\, dx \overset{FS}{=} \frac{A}{\pi}\cdot\left[\frac{e^{-x}}{(-1)^2+n^2}\left(-\underbrace{\cos(nx)}_{\equiv 1} + n\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{\equiv 0}\right)\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{A}{\pi\cdot(1+n^2)}\cdot\left[1 - e^{-2\pi}\right] = \frac{1}{1+n^2} \,//$

d): $\underline{\underline{b_n}} = \frac{A}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} e^{-x}\cdot\sin(nx)\, dx \overset{FS}{=} \frac{A}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1^2+n^2}\cdot\left(-\underbrace{\sin(nx)}_{\equiv 0} - n\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{\equiv 1}\right)\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{A\cdot n}{\pi(1+n^2)}\left[1 - e^{-2\pi}\right] = \frac{n}{1+n^2} \,//$

e) $\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+1^2}\left[\cos x + 1\cdot\sin x\right] + \frac{1}{1+2^2}\left[\cos 2x + 2\cdot\sin 2x\right]$

$+ \frac{1}{1+3^2}\left[\cos 3x + 3\cdot\sin 3x\right] + \ldots$

A3

$\varphi: \left| \begin{array}{l} x = t\cdot\cos t \\ y = \cos t \end{array} \right| \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

a): $\dot{x} = \overset{c}{\cos t} - t\cdot\overset{s}{\sin t}$ $\Rightarrow \underline{y'} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\sin t}{t\cdot\sin t - \cos t}$ //

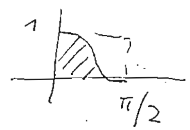
$\dot{y} = -\sin t = -s$

b): $y' = 0 \Rightarrow \dot y = -\sin t = 0 \Rightarrow \underline{t = 0} \Rightarrow$

$\underline{\underline{S(x=0,\ y=1)}}$ Maximum ✓

c): $\underline{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[x\cdot\dot y - \dot x\, y]\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int[t\cdot \cancel{c}(-s) - (c - \cancel{ts})\cdot c]\,dt$

$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = -\int_0^{\pi/2}\cos^2 t = -\frac{\pi}{4}$ //



d): $\underline{\text{in } S(0,1)}$: $\dot x = 1,\ \dot y = 0$

$\underline{t = 0}$ $\quad \ddot x = -s - (s + t\cdot c) = 0$

$\ddot y = -c \quad = -1 \quad \Longrightarrow$

$\underline{\underline{\kappa}} = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\cdot\ddot x}{[(\dot x)^2 + (\dot y)^2]^{3/2}} = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$

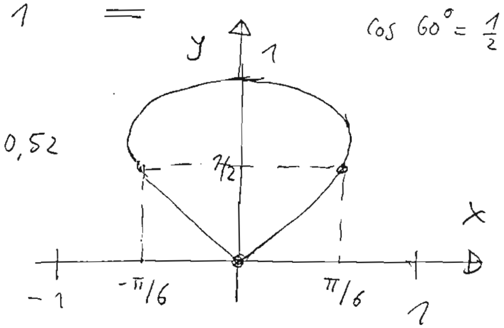
$\cos 60° = \frac{1}{2}$

e):

t	$\pm\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$
x	0	0	$\pi/6$
y	0	1	1/2
y'	$\pm\frac{2}{\pi}$	0	

$\pi/6 = 0{,}52$

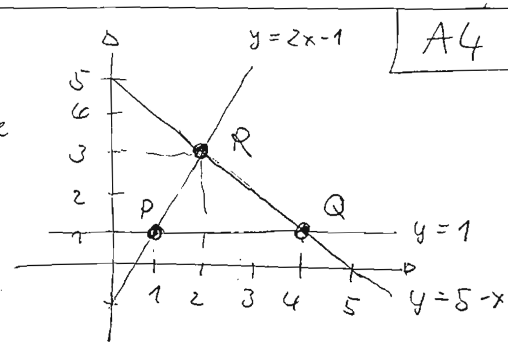
$\frac{2}{\pi} = 0{,}636$ $\quad$ S



A4

a) + b): $P(1,1),\ Q(4,1)$

$R(2,3)$ nach Skizze



c): $M(x,y)$ = bel. Pkt $\Rightarrow$

$f(x,y) = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 +$

$(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 +$

$+ (x - x_R)^2 + (y - y_R)^2$ = Σ der Abstands-Quadrate

d): f_x ($2\cdot[(x-1) + (x-4) + (x-2)] = 2\cdot[3x - 7] \overset{!}{=} 0$

$f_y = 2\cdot[(y-1) + (y-1) + (y-3)] = 2\cdot[3y - 5] = 0$

$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) = (x_0, y_0)$ = Minimum

da: $\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6\cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$

A5

$\boxed{y'' = \frac{1 - (y')^2}{y}}$ mit $\boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ y' = 0 \end{array}}$ bei $x = 0$

a): $v := y' \Rightarrow y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot v \Rightarrow$

$\boxed{\frac{dv}{dy} = \frac{1 - v^2}{y\cdot v}}$ separable v-DGL $\Rightarrow \frac{v\,dv}{1 - v^2} = \frac{dy}{y}$ $\cdot(-2)$

$\frac{2v\,dv}{v^2 - 1} = -2\cdot\frac{dy}{y} \overset{\int}{\Rightarrow} \ln(v^2 - 1) = -2\cdot\ln y + K$

$\overset{v}{=} \ln\left(\frac{L}{y^2}\right)$

$\Rightarrow v^2 = 1 + \frac{L}{y^2} \Rightarrow v = \pm\sqrt{1 + \frac{L}{y^2}}$

AB: $\begin{array}{l} y = 1 \\ v = 0 \end{array}$ bei $x = 0 \Rightarrow L = -1 \Rightarrow v = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$

$\overset{v}{=} \pm\sqrt{y^2 - 1}/y$ //

b): $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y} \Rightarrow \pm\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}\,dy = dx \overset{\int}{\Rightarrow}$

$x + M = \pm\int\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}\,dy \underset{FS}{=} \pm\sqrt{y^2 - 1} \Longrightarrow$

AB: $x = 0,\ y = 1 \Rightarrow M = 0$

$(x + M)^2 = y^2 - 1 \Leftrightarrow \underline{y^2 - (x + M)^2 = 1}$

$\Rightarrow \underline{y^2 - x^2 = 1}$

Hyperbel

c):