Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **WS 2003/2004**

Diplomvorprüfung in Mathematik II (Analysis) – Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Pöschl

WICHTIG :

Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Alle Prüfungsteilnehmer bearbeiten die Aufgaben 1-5.
Wiederholer und Nachholer der Prüfung vom SS 2003 bearbeiten die Augabe 6_W1 (Maple)
Alle anderen Wiederholer und Nachholer bearbeiten die Augabe 6_W2 (Numerische Integration)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (/77)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Kurven, Parameterdarstellung, Sektorfläche, max = 13 Punkte)

Die ebene Kurve k habe die Parameterdarstellung:

$$x = \frac{1}{\cos(t)}\ , \ y = \tan(t) \quad \text{mit} \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

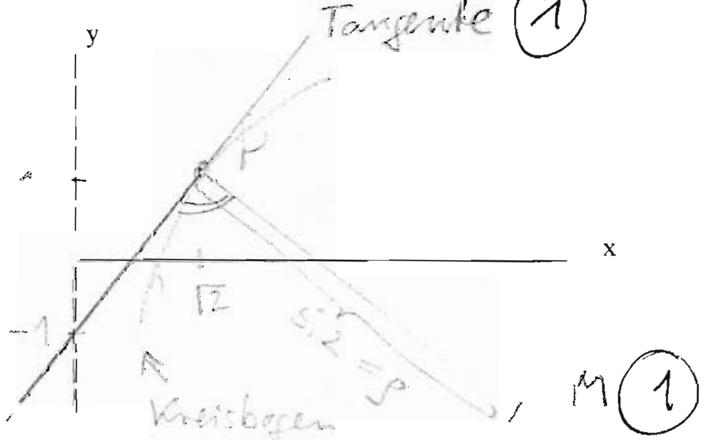
P sei der zu dem Parameterwert $\frac{\pi}{4}$ gehörige Punkt von k.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von P und die Steigung von k in P. (/4)

$\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ \tan(\pi/4) = 1 \Longrightarrow P = (\sqrt{2}, 1)$ 1

1 $\dot{x} = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\ ,\quad \dot{y} \overset{1}{=} \frac{1}{\cos^2(t)}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 2\ ,\quad m = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 1

b) Ermitteln Sie den Krümmungsradius ρ von k in P. (/7)
Skizzieren Sie den Krümmungskreisbogen bei P unter Berücksichtigung der Ergebnisse in Aufgabenteil a) . (Einheit 1 cm).



$$① \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\cos(t)\cdot\cos^2(t) - \sin(t)\cdot 2\cos(t)\cdot(-\sin(t))}{\cos^4(t)} = \dfrac{\cos^2(t) + 2\sin^2(t)}{\cos^3(t)} \\ \underset{t=\frac{\pi}{4}}{=} \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2} \quad \text{in } P \end{cases}$$

$$① \left\{ \ddot{y} = \dfrac{-2\cos(t)(-\sin(t))}{\cos^4(t)} = \dfrac{2\sin(t)}{\cos^3(t)} \underset{t=\frac{\pi}{4}}{=} 4 \quad \text{in } P \right.$$

$$k = \underbrace{\dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[\dot{x}^2+\dot{y}^2]^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 4 - 3\sqrt{2}\cdot 2}{6^{3/2}}}_{①} = \underbrace{\dfrac{-2\sqrt{2}}{6\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}}_{①}$$

$$\rho = \left|\frac{1}{k}\right| = 3\sqrt{3} \approx 5.2 \quad ①$$

c) Zeigen Sie, dass k in impliziter Form durch $x^2 - y^2 = 1$ mit $x > 0$ gegeben ist. (/1)

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{\cos^2(t)} - \tan^2(t) \overset{①}{=} \frac{1-\sin^2(t)}{\cos^2(t)}$$

$$= \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} = 1$$

d) Berechnen Sie den Inhalt A der Sektorfläche von k zwischen den Punkten S = (1,0) und P. (/5)

① Zum Punkt S gehört der Parameterwert $t=0$.

$$① \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{1}{\cos^3(t)} - \frac{\sin^2(t)}{\cos^3(t)} = \frac{\cos^2(t)}{\cos^3(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\text{Sektorfläche } A \overset{①}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos(t)}$$

$$\overset{①}{=} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\pi/4} = \underbrace{\ln\left(\tan\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)\right) \approx 0.8814}_{①} \cdot \frac{1}{2}$$

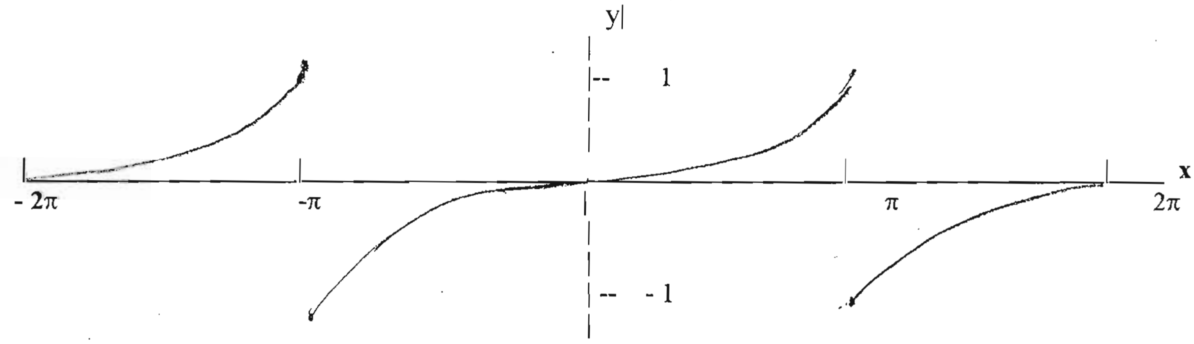
$$\approx 0.4407$$

↑ Formelsammlung

Aufgabe 2 : (Fourierkoeffizienten, Fourierpolynom) (max = 16 Punkte)

Es sei $y = -\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ mit $x \in [-\pi, 0[$ und sei $y = \left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ mit $x \in [0, \pi[$ eine ungerade Funktion mit der Periode 2π.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi[$ (/2)



b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_n und b_n (/5)

Da die Funktion ungerade ist, ist (1) $a_0 = 0$ und $a_n = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n \overset{(1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \sin(k \cdot t)\,dt = \frac{2}{\pi^3} \int_0^{\pi} t^2 \sin(kt)\,dt \overset{(1)}{\underset{\text{Formelsammlung}}{=}}$$

$$\frac{2}{\pi^3}\left[\underbrace{\frac{2t}{k}\sin(kt)}_{=0} - \left(\frac{t^2}{k} - \frac{2}{k^3}\right)\cdot\cos(kt)\right]_0^{\pi} \overset{(1)}{=}$$

$$\frac{2}{\pi^3}\left[-\left(\frac{\pi^2}{k} - \frac{2}{k^3}\right)\cdot(-1) + \left(\frac{0^2}{k} - \frac{2}{k^3}\right)\cdot 1\right] =$$

$$\frac{2}{\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{k} - \frac{2}{k^3} - \frac{2}{k^3}\right\} = \frac{2}{k\pi} - \frac{8}{k^3\pi^3} \; (1)$$

$b_3 = 0.2122 - 0.0095 = 0.2027$

$b_2 = -0.3$

$b_1 = 0.38$

c) Geben Sie das Fourierpolynom F5(x) 5. Grades (d.h., den Teil der Fourierreihe bis einschließlich zu den Koeffizienten a_5 und b_5) an. (/4)

$$F5(x) \overset{1}{=} b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + b_5 \cdot \sin(5x)$$

$$\overset{3}{=} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)\sin(2x) + \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{8}{27\pi^3}\right)\sin(3x) +$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^3}\right)\cdot\sin(4x) + \left(\frac{2}{5\pi} - \frac{8}{125\pi^3}\right)\cdot\sin(5x)$$

d) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \int_0^{\pi} f(x)dx$ und das Integral $I_2 = \int_0^{\pi} F3(x)dx$. (/5)

Dabei sei F3(x) das anlog wie in Aufgabeteil c) gebildete Fourierpolynom 3.Grades.

$$I_1 = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi^2}dx \overset{1}{=} \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$$

$$I_2 \overset{1}{=} \int_0^{\pi} \left\{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)\sin(2x) + \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{8}{27\pi^3}\right)\cdot\sin(3x)\right\}dx$$

$$\overset{1}{=} \left[\underbrace{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)}_{\approx 0.3786}(-\cos(x)) + \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)}_{\approx 0.1430 * 2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + \underbrace{\left(\frac{2}{3\pi} - \frac{8}{27\pi^3}\right)}_{\approx +0.06755 * 3}\left(-\frac{1}{3}\cdot\cos(3x)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\overset{1}{\approx} 0.3786(-(-1)+1) \underbrace{-0.1430(1-1)}_{=0} - 0.06755(+(-1)-1) \overset{1}{=} 0.8923$$

Aufgabe 3 : (Funktion von zwei Variablen, Extremwerte, Volumenintegral, max = 13 Punkte)

Die Fläche F1 habe die Gleichung:

$z = f(x,y) = 15xy - 5x^3 - 5y^3$.

a) Man ermittle die Werte $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, in denen Extremwerte oder Sattelpunkte auftreten. (/7)
Berechnen Sie bei eventuellen Extremwerten, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

$z_x = 0 \xRightarrow{1} 15y - 15x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$
$z_y = 0 \xRightarrow{1} 15x - 15y^2 = 0 \Rightarrow x = y^2$
$\cdot y = y^4$, also $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ 1
dann $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Diskriminante $\Delta = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} -30x & 15 \\ 15 & -30x \end{vmatrix} = 30x^2 - 15^2$

Für $x_1 = y_1 = 0$ ist $\Delta = -15^2 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt 1

Für $x_1 = y_1 = 1$ ist $\Delta = 30^2 - 15^2 > 0 \Rightarrow$ Extremwert 1

Wegen $z_{xx} = -30 < 0$ liegt ein Maximum vor. 1

b) Man berechne für die Fläche F2 mit der Gleichung:

$z = f(x,y) = (x - y)^2$.

das Volumen V des Zylinders mit der Achse z und mit dem Radius 1, der unten von der Ebene z = 0 (/6)
und oben durch die Fläche F2 begrenzt wird.
(Der Zylinder steht also senkrecht auf der xy Ebene, seine Achse ist die z-Achse und sein Querschnitt in der xy Ebene ist der Einheitskreis). Man verwende zur Lösung geeignete Koordinaten.

$x = r\cos(\varphi)$ $y = r\cdot\sin(\varphi)$ (Polarkoordinaten) 1

$$V \overset{1}{=} \int_G (x-y)^2 \, dx\,dy \overset{1}{=} \int_G (r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 r\,dr\,d\varphi =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 r\,dr\,d\varphi \overset{1}{=} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (\cos^2(\varphi) - \underbrace{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}_{= \sin(2\varphi)} + \sin^2(\varphi))\,d\varphi$$

$$\overset{1}{=} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \sin(2\varphi))\,d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\left(2\pi + \left[\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right]_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot(1 - 1) = \frac{\pi}{2} \quad 1$$

Aufgabe 4: (Gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung, max = 11 Punkte)

Ermitteln Sie für die DGL $y' = \dfrac{1}{y(1+x^2)}$ für $y>0$

a) Die allgemeine Lösung y (/3)

$$y' \cdot y \overset{1}{=} \frac{1}{1+x^2} \implies \frac{y^2}{2} = \arctan(x) + C$$

$$y \overset{1}{=} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\arctan(x) + C} \quad \text{mit } \arctan(x) + C > 0$$

wegen Voraussetzung $y > 0$

b) Die spezielle Lösung durch den Punkt x = 1, y = 2. (/2)

$$2 \overset{1}{=} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\underbrace{\arctan(1)}_{=\pi/4} + C}$$

$$4 = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + C\right) \overset{1}{\implies} C = 2 - \frac{\pi}{4} = 2 - 0{,}785398163$$

$$= 1.214601837$$

c) Mit dem Startwert $x_0 =$ 1 und $y_0 = 2$ berechne man den Wert y(2) mit dem Runge Kutta Verfahren (/6)
und der Schrittweite h = 1, sowie **exakt** gemäß Aufgabenteil b).

exakt: $y(2) \underset{\text{nach b)}}{=} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\arctan(2) + 1.214601837} = 2.154878444$ 1

Runge Kutta: $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right)$

mit $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ f(x,y) = \dfrac{1}{y(1+x^2)}$. und

1 $k_1 = f(1,2) = \dfrac{1}{2(1+1^2)} = \dfrac{1}{4}$

1 $k_2 = f\left(\frac{3}{2}, \underbrace{2+\frac{1}{8}}_{17/8}\right) = \dfrac{1}{\frac{17}{8}\left(1+\frac{9}{4}\right)} = \dfrac{8}{17} \cdot \dfrac{4}{13} \approx 0.14479638$

1 $k_3 = f\left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}14479638\right) = \dfrac{1}{2.07239819\left(1+\frac{9}{4}\right)} = 0.148471615$

1 $k_4 = f(2, 2 + 0.148471615) = \dfrac{1}{2.148471615(1+4)} = 0.09308943$

1 $y_1 = 2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} + 2 \cdot (0.14479638 + 0.148471615) + 0.09308943\right) =$
$2.15493757.$

Aufgabe 5: (Lineare inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, max = 11 Punkte)

Gegeben ist die DGL $y'' + y' = e^{-x}\sin(x)$. Gesucht ist:

a) Die allgemeine Lösung der DGL (/8)

$y_h \underset{\text{Ansatz}}{=} e^{\lambda x}$, char. Gleichung $\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ 1

$y_h = C_0 + C_1 e^{-x}$ 1 (homogene Lösung)

$y_p \overset{1}{\underset{\text{Ansatz}}{=}} e^{-x}(A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x))$

$y_p' \overset{1}{=} e^{-x}(-A\cdot\cos(x) - B\cdot\sin(x) - A\cdot\sin(x) + B\cdot\cos(x))$

$y_p'' \overset{1}{=} e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x) + A\sin(x) - B\cos(x)$
$+A\sin(x) - B\cos(x) - A\cos(x) - B\sin(x))$

$= 2e^{-x}(A\sin(x) - B\cos(x))$

Eingesetzt in DGL (nach Kürzen durch e^{-x}):

1 $2A\sin(x) - 2B\cos(x) - A\cos(x) - B\sin(x) - A\sin(x) + B\cos(x) \overset{!}{=} \sin(x)$

Koeffizientenvergleich für $\cos(x)$: $-B - A = 0 \Rightarrow A = -B$

" " $\sin(x)$: $A - B = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

somit $y_p = e^{-x}(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x))$ partikuläre Lösung 1 $B = -\frac{1}{2}$

und $y_{allg} \overset{1}{=} y_h + y_p = C_0 + C_1 e^{-x} + e^{-x}(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x))$

b) Die spezielle Lösung der DGL, die bei x = 0 den Wert y = 2 und die Ableitung y' = 0 hat. (/3)

Ansatz 1

$y(x=0) = 2 = C_0 + C_1 + \frac{1}{2}$

$y'(x=0) = 0 = -C_1 + 1\cdot(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \Rightarrow C_1 = -1$

$\Rightarrow C_0 = 2.5$ 1

also

1 $y_s = \frac{5}{2} + e^{-x}(-1 + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x))$

Aufgabe 6_W1 : (Maple) für Wiederholer/ Nachholer der Prüfung vom SS 2003, also alle Studenten, die jetzt im 3.Fachsemester sind. Max = 9 Punkte.

a) Welche MAPLE – Befehle erzeugen eine Taylorreihe der Funktion y = cos(x) um den Entwicklungspunkt x = 3 bis zum Glied mit x^4 , Restglied $O((x-3)^5)$? (/3)

```
y := cos(x);
reihe := taylor(y, x=3, 5);
```

b) Welche MAPLE Befehle berechnen die Stammfunktion der Funktion $y = x * e^x$? (/3)

```
y:= x* exp(x);
F= int(y, x);
```

c) Welche MAPLE Befehle berechnen für die Funktion y aus Aufgabenteil b) (/3)

das Integral $\int_1^5 y(x)dx$?

```
Wert = int(y, x=1..5);
evalf(%); oder
evalf(wert);
```

Aufgabe 6_W2 : (Numerische Integration) für alle anderen Wiederholer/ Nachholer, max = 9 Punkte

Gegeben ist die Funktion y = f(x) = (4-x)sinh(x) mit $x \in [0, 4]$.

Man berechne das Integral $\int_0^4 y(x)dx$ auf zweierlei Arten:

a) exakt $\int_0^4 (4-x)\sinh(x)dx \overset{1}{=} 4\int_0^4 \sinh(x)dx - \int_0^4 x\cdot\sinh(x)\,dx$ (/3)

$$\overset{1}{=} \Big[4\cosh(x) - x\cosh(x) + \sinh(x)\Big]_0^4 = 4\cosh(4) - 4\cosh(4)$$

$$+\sinh(4) - 4\cosh(0) + \underbrace{0\cosh 0}_{=0} - \underbrace{\sinh(0)}_{=0} \approx 27.29 - 4 = 23.29 \quad 1$$

b) numerisch

- nach der Kepler Fassregel (2 Intervalle) (/3)

1 $h = \frac{4}{2} = 2$

$$1 \begin{cases} y_0 = (4-0)\cdot\sinh(0) = 0 \\ y_1 = (4-2)\cdot\sinh(2) = 7{,}254 \\ y_2 = (4-4)\sinh(4) = 0 \end{cases}$$

$$F_K = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{2}{3}(0 + 4\cdot 7{,}254 + 0) = 19{,}34 \quad 1$$

- nach der Simpson - Regel (4 Intervalle) (/3)

1 $h = 1$

$$1 \begin{cases} y_0 = (4-0)\cdot\sinh(0) = 0 \\ y_1 = (4-1)\ \sinh(1) = 3{,}526 \\ y_2 = (4-2)\ \sinh(2) = 7{,}254 \\ y_3 = (4-3)\cdot\sinh(3) = 10{,}018 \\ y_4 = (4-4)\cdot\sinh(4) = 0 \end{cases}$$

$$F_s = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) =$$

$$1 \quad \frac{1}{3}\cdot 1(0 + 4\cdot 3{,}526 + 2\cdot 7{,}254 + 4\cdot 10{,}018 + 0) \approx$$

$$22{,}89$$