(143)

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 04/05

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Pöschl, Warendorf, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Alle Studenten, die den Maple-Kurs besucht haben, bearbeiten Aufgabe 6.
Alle anderen Studenten (ohne Maple-Kurs) bearbeiten Aufgabe 5c,d

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: 160 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen (/ 12 **Punkte)**

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 1.$$

(a) Skizzieren Sie

i. die Höhenlinie bei $z = 1$. (Hinweis: Quadratische Ergänzung führt auf eine bekannte Kurve)

ii. die Schnittkurve mit der y, z-Koordinaten-Ebene ($x = 0$).

iii. die Schnittkurve mit der x, z-Koordinaten-Ebene ($y = 0$).

(b) Bestimmen Sie die Extremwert(e) und deren Typ.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene im im Punkt $P(1, 2, z)$.

a) i) $1 = 4x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 1$

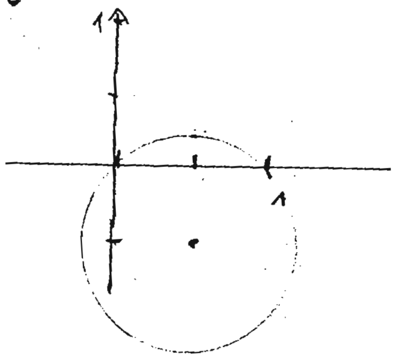
$\Rightarrow 0 = 4(x^2 - x) + 4(y^2 + y)$

$\Rightarrow 2 = 4(x^2 - x + (\frac{1}{2})^2) + 4(y^2 + y + (\frac{1}{2})^2)$

$\Rightarrow 2 = 4(x - \frac{1}{2})^2 + 4(y + \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2$ Kreis um $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

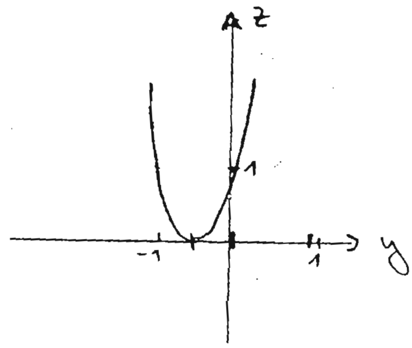
mit Radius $r = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$



$\boxed{3}$

ii) $z = 4y^2 + 4y + 1$

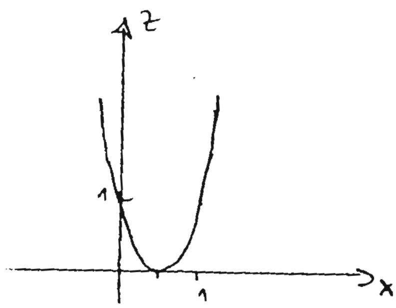
Parabel: Scheitelpunkt bei $S(-\frac{1}{2}; 0)$



$\boxed{2}$

iii) $z = 4x^2 - 4x + 1$

Parabel: Scheitelpunkt bei $S(\frac{1}{2}; 0)$



$\boxed{2}$

b) Extremwerte:

Bed: $f_x = 0$ und $f_y = 0$, $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$f_x = 8x_E - 4 = 0 \Rightarrow x_E = \frac{1}{2}$

$f_y = 8y_E + 4 = 0 \Rightarrow y_E = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 8 \\ f_{yy} = 8 \\ f_{xy} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 64 > 0$$

$f_{xx} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $H(+\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; f(1/2; -1/2))$

$= H(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1)$

$\boxed{3}$

c) Tangentialebene

$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$x_0 = 1,\ y_0 = 2 \Rightarrow z_0 = 25$

$\Rightarrow z = 25 + 4(x-1) + 20(y-2)$

$= 25 + 4x - 4 + 20y - 40$

$= 4x + 20y - 19$

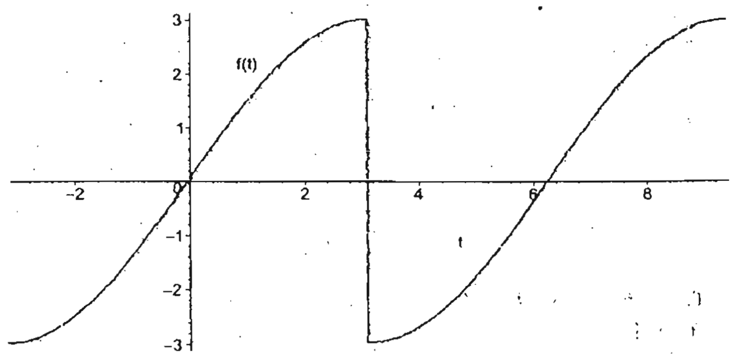
$\boxed{2}$

140

2. **Aufgabe: Fourierreihen** (/12 Punkte)

Gegeben ist die (ungerade) Funktion 2π-periodische Funktion

$$f(t) = 3\sin(\frac{t}{2}) \quad t \in [-\pi, \pi[\text{ , periodisch sonst.}$$



Bestimmen Sie die Fourierreihe von $f(t)$.

$f(t)$ ungerade : $\Rightarrow a_k = 0$ 1

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 3\sin(t/2) \cdot \sin(kt)\, dt$$

$$= \frac{6}{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{1}{2}-k)t}{2(\frac{1}{2}-k)} - \frac{\sin(\frac{1}{2}+k)t}{2(\frac{1}{2}+k)} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}-k)\pi}{1-2k} - \frac{\sin(\frac{1}{2}+k)\pi}{1+2k} \right)$$ 3

Fallunterscheidung

$$\sin(\tfrac{1}{2}-k)\pi = \begin{cases} 1 & ; k = 2,4,6\ldots \\ -1 & ; k = 1,3,5\ldots \end{cases}$$ 2

$$\sin(\tfrac{1}{2}+k)\pi = \begin{cases} 1 & ; k = 2,4,6 \\ -1 & ; k = 1,3,5 \end{cases}$$

k gerade (2,4,6..):

$$b_k = \frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k} - \frac{1}{1+2k}\right) = \frac{6}{\pi} \frac{1+2k-(1-2k)}{1-4k^2} = \frac{24}{\pi} \cdot \frac{k}{1-4k^2} = -\frac{24}{\pi}\frac{k}{4k^2-1}$$ 2

k ungerade (1,3,5..)

$$b_k = \frac{6}{\pi}\left(\frac{-1}{1-2k} - \frac{-1}{1+2k}\right) = -\frac{24}{\pi}\frac{k}{1-4k^2} = \frac{24}{\pi}\frac{k}{4k^2-1}$$ 2

$$\Rightarrow F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{4k^2-1} \cdot \sin(kt) = \frac{8}{\pi}\sin t - \frac{16}{5\pi} \cdot \sin(2t) + \frac{72}{35\pi} \cdot \sin(3t) - \frac{32}{21\pi}\sin(4t) \pm$$ 2

139

3. **Aufgabe: Kurve in Parameterdarstellung** (/12 **Punkte**)

Gegeben ist die Kurve in Parameterdarstellung

$$x = \cos(t) + t\sin(t)$$
$$y = \sin(t) - t\cos(t), \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

(a) Erstellen Sie eine Wertetabelle:

t	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	1	1,1	1,3	1,5	1,6
$y(t)$	0	0,0	0,2	0,5	1

2,5

(b) Berechnen Sie die Steigung und geben Sie die Werte des Parameters t an, für die die Kurve eine horizontale bzw. vertikale Tangente hat.

(c) Skizzieren Sie die Kurve im Intervall $I = [0; \frac{\pi}{2}]$. 1 LE $\hat{=}$ 2cm

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge im Intervall $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.

b) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\dot{x} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$

$\dot{y} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$

$\Rightarrow y' = \frac{t\sin t}{\cancel{t\cos t}} = \tan t$

horizontale Tangente:

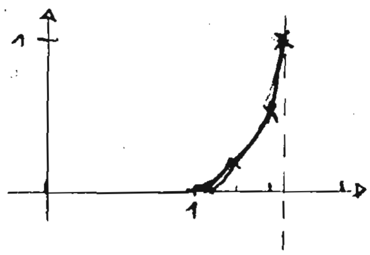
$y' = 0 \Rightarrow \tan t = 0 \Rightarrow t = 0$

vertikale Tangente

$y' \to \infty \Rightarrow \tan t \to \infty \Rightarrow t = \pi/2$

$\boxed{5}$

c)



$\boxed{1,5}$

d) Bogenlänge

$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\, dt$

$= \int_0^{\pi/2} t \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} t\, dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8} = 1,2337$

$\boxed{3}$

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung** (/12 **Punkte**)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 9y = \sin(3x).$$

Lösung homogene DGL:

$$y'' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -9$$

$$\lambda = \pm 3j$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) \qquad \boxed{3}$$

Partikuläre Lösung:

$\pm \omega j = \pm 3j$ ist Lösung des charakteristischen Polynoms

$\Rightarrow$ Ansatzfunktion:

$$y_p = x \cdot (A\sin(3x) + B\cos(3x)) \qquad \boxed{1}$$

$$y_p' = A\sin(3x) + B\cos(3x) + x \cdot (3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)) \qquad \boxed{1}$$

$$y_p'' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) + 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) + x(-9A\sin(3x) - 9B\cos(3x))$$

$$= 6A\cos(3x) - 6B\sin(3x) - 9x(A\sin(3x) + B\cos(3x)) \qquad \boxed{2}$$

Einsetzen in DGL:

$$6A\cos(3x) - 6B\sin(3x) - 9x(A\sin(3x) + B\cos(3x)) + 9x(A\sin(3x) + B\cos(3x)) = \sin(3x) \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 6A\cos(3x) - 6B\sin(3x) = \sin(3x) \qquad \boxed{1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$6A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$-6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6} \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{6} x \cos(3x) \qquad \boxed{1}$$

Lösung:

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) - \frac{1}{6} x \cos(3x) \qquad \boxed{1}$$

137

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/12 **Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = x \cdot y \cdot (1 - y).$$

Bestimmen Sie

(a) die allgemeine Lösung.

(b) die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $y_0 = 2$.

(c) **c,d: nur für Studenten, die NICHT den Maple-Kurs besucht haben.** den exakten Wert y_1 der speziellen Lösung aus Aufgabenteil 5b bei $x_1 = 0,5$.

(d) den Näherungswert bei $x_1 = 0,5$ mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $y_0 = 2$ mit Hilfe vom Runge-Kutta-Verfahren in einem Schritt.

a) Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y(1-y)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int x\,dx$$ (Partialbruchzerlegung oder Formelsammlung)

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{-2y}{-2y+2}\right| = \frac{1}{2}x^2 + \ln C \quad | e^{()}$$

$$\Rightarrow \frac{+y}{y-1} = C \cdot e^{1/2\,x^2} \quad | \cdot (y-1) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{1/2 x^2} \cdot y - Ce^{1/2 x^2}$$

$$\Rightarrow y(1 - C \cdot e^{1/2 x^2}) = -Ce^{1/2 x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-Ce^{1/2 x^2}}{1 - C \cdot e^{1/2 x^2}} = \frac{Ce^{1/2 x^2}}{C \cdot e^{1/2 x^2} - 1}$$

6

b) $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ in (*)

$$\Rightarrow \frac{2}{2-1} = C \cdot e^{1/2\, 0^2}$$

$$\Rightarrow 2 = C$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{2e^{1/2 x^2}}{2e^{1/2 x^2} - 1}$$

2

c) $y_s(0{,}5) = \dfrac{2 \cdot e^{1/2 \cdot (1/2)^2}}{2 \cdot e^{1/2 \cdot (1/2)^2} - 1} = 1{,}7897$ $\boxed{1}$

d)

	x	y	$f(x,y) = x \cdot y(1-y)$	$k_i = \overset{h}{0{,}5} \cdot f(x,y)$	
I	0	2	0	0	$= k_1$
II	0,25	2	$0{,}25 \cdot 2(1-2) = -0{,}5$	$-0{,}25$	$= k_2$
III	0,25	1,875	$0{,}25 \cdot 1{,}875(1-1{,}875) = -0{,}41015625$	$-0{,}205078125$	$= k_3$
IV	0,5	1,794921875	$0{,}5 \cdot 1{,}79\ldots(1-1{,}79\ldots) = -0{,}713411768$	$-0{,}356705844 = k_4$	

$K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -\cancel{0{,}2111378027}$
$-0{,}2111143689$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + K = \cancel{1{,}788621972}$
$1{,}788856311$

$\boxed{3}$

6. **Aufgabe MAPLE: nur für Studenten, die den Maple-Kurs besucht haben, u.a. alle, die im 4. Fachsemester sind** (/ 4 **Punkte**)
   Gegeben sei die Funktion
   $$f(x) = 3\arctan(x)$$
   (a) Definieren Sie obige Funktion mit MAPLE.
   (b) Welcher MAPLE-Befehl berechnet die 2. Ableitung an der Stelle 1: $f''(1)$?
   (c) Geben Sie den Maple-Befehl an, der die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x = 1$ bis zum Glied $(x-1)^2$ entwickelt.
   (d) Geben Sie den Maple-Befehl zur Berechnung von $\int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$ an.

Maple-Aufgabe:

Aufgabe 6:

a) Definition Funktion

```
> f:=x->3*arctan(x);
```

$$f := x \rightarrow 3\arctan(x)$$

b) 2. Ableitung an der Stelle x=1

```
> D(D(f))(1);
```

$$\frac{-3}{2}$$

c) Taylorentwicklung

```
> taylor( f(x), x=1, 3 );
```

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

d) Integral

```
> int( f(x), x=0..0.5 );
> .3607560865
```

4