FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN   FACHBEREICH 03 FA   WS 05/06

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Warendorf, Pöschl, Selting, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Alle Studenten, die den Maple-Kurs besucht haben, bearbeiten Aufgabe 6.
Alle anderen Studenten (ohne Maple-Kurs) bearbeiten Aufgabe 7

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 1~~?~~2 **Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 1 - (y - x)^2.$$

[5]

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung. (Hinweis: Substitution ist hier das geeignete Verfahren.)

Subs: $u = y - x \Rightarrow u' = y' - 1 \Rightarrow y' = u' + 1$

Einsetzen: $u' + 1 = 1 - u^2$

$\Rightarrow u' = -u^2$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -u^2$

$\Rightarrow -\int \frac{du}{u^2} = +\int dx$

$\Rightarrow \frac{1}{u} = x + C$

$\Rightarrow u = \frac{1}{x+C}$

Rücksubs:

$\Rightarrow y - x = \frac{1}{x+C}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x+C} + x = \frac{x^2 + Cx + 1}{x + C}$

[2]

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung: $x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = 1$

$y(0) = 1$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow y_s = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

$\boxed{1}$ (c) Berechnen Sie die Lösung y_s an der Stelle $x = 1$ exakt.

$$y_s(1) = \frac{3}{2}$$

$\boxed{4}$ (d) Berechnen Sie die Lösung an der Stelle $x = 1$ mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ($h = 1$, Anfangsbedingungen s. (b)).

$$y' = f(x,y) = 1 - (y - x^2)$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 1$$

x	y	$f(x,y)$	$k = h \cdot f(x,y)$
0	1	0	$0 = k_1$
0,5	1	0,75	$0{,}75 = k_2$
0,5	1,375	0,234375	$0{,}234375 = k_3$
1	1,0234375	0,9450683	$0{,}9450683 = k_4$

$$\Rightarrow \quad k = \cancel{0{,}3606363} \quad 0{,}48563633$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \cancel{1{,}3606363} \quad 1{,}48563633$$

2. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung** (/ ca. ~~10~~ 11 **Punkte**)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y' = 5\sin(2x).$$

$\boxed{2}$ (a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$$y_h'' + y' = 0$$

char. Polynom:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$$

$\boxed{5}$ (b) Bestimmen Sie die Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung.

$$y = y_h + y_p$$

Ansatz: $\pm 2j$ ist nicht Lösung des char. Polynoms

$$\Rightarrow y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

$$\Rightarrow y_p' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$

$$\Rightarrow y_p'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Einsetzen:

$$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) = 5\sin(2x)$$

$$\Rightarrow (-4A-2B)\sin(2x) + (2A-4B)\cos(2x) = 5\sin 2x$$

Koeffizientenvergleich:

$2A - 4B = 0 \Rightarrow A = 2B$

$-4A - 2B = 5 \Rightarrow -10B = 5$

$\Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -1$

$\Rightarrow y_p = -\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\Rightarrow y = -\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + C_1 + C_2 e^{-x}$

3 (c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 0, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$

$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$

$y' = -2\cos(2x) + \sin(2x) - C_2 e^{-x}$

$y'(0) = 0 \Rightarrow -2 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$

$y(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

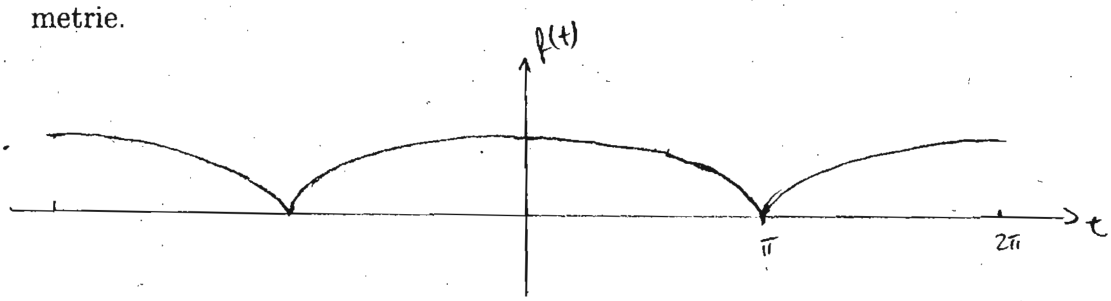
$\Rightarrow y_s = -\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{5}{2} - 2e^{-x}$

3. **Aufgabe: Fourierreihen** (/ ca. 13 Punkte)

Gegeben ist die Funktion 2π-periodische Funktion

$$f(t) = \cos(\frac{t}{2}) \quad t \in [-\pi, \pi[\text{ , periodisch sonst.}$$

3 (a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und untersuchen Sie sie auf Symmetrie.



gerade Funktion $\Rightarrow b_k = 0$

8 (b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_k und b_k der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

$b_k = 0$

1 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\frac{t}{2})\,dt = \frac{2}{\pi}\left[2\sin(\frac{t}{2})\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}[2-0] = \frac{4}{\pi}$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\frac{t}{2})\cdot\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((\frac{1}{2}-k)t)}{2(\frac{1}{2}-k)} + \frac{\sin((\frac{1}{2}+k)t)}{2(\frac{1}{2}+k)}\right]_0^\pi$$

3 $$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin((\frac{1}{2}-k)\pi)}{1-2k} + \frac{\sin((\frac{1}{2}+k)\pi)}{1+2k}\right)$$

<u>k gerade</u>: 2, 4, 6 ...

2 $\Rightarrow \sin((\frac{1}{2}-k)\pi) = \sin((\frac{1}{2}+k)\pi) = 1$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$$

<u>k ungerade</u>: 1, 3, 5 ..

2 $\Rightarrow \sin((\frac{1}{2}-k)\pi) = \sin((\frac{1}{2}+k)\pi) = -1$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$$

2 (c) Geben Sie die Fourierreihe bis zum 4. Glied an: $F_4(t)$.

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{4}{3\pi}, \quad a_2 = -\frac{4}{15\pi}, \quad a_3 = \frac{4}{35\pi}, \quad a_4 = -\frac{4}{63\pi}$$

$$\Rightarrow \quad F_4(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos t - \frac{4}{15\pi}\cos(2t) + \frac{4}{35\pi}\cos(3t) - \frac{4}{63\pi}\cos(4t)$$

4. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 10 Punkte)**
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

1 (a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion an.

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$W = \mathbb{R}$

1,5 (b) Für welche Werte (x, y) ist $f(x, y) = 0$ bzw. $f(x, y) > 0$ bzw. $f(x, y) < 0$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow \ln(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$
Linie des Einheitskreise

$f(x,y) > 0 \Rightarrow x^2+y^2 > 1 \Rightarrow$ Fläche außerhalb des Einheitskreises

$f(x,y) < 0 \Rightarrow 0^2 < x^2+y^2 < 1 \Rightarrow$ Fläche innerhalb des Einheitskreises ohne Mittelpunkt (0,0)

3 (c) Zeichnen Sie die Höhenlinien für $z = -0,5$, $z = 0$ und $z = 1$ in ein Diagramm (1LE=2cm).

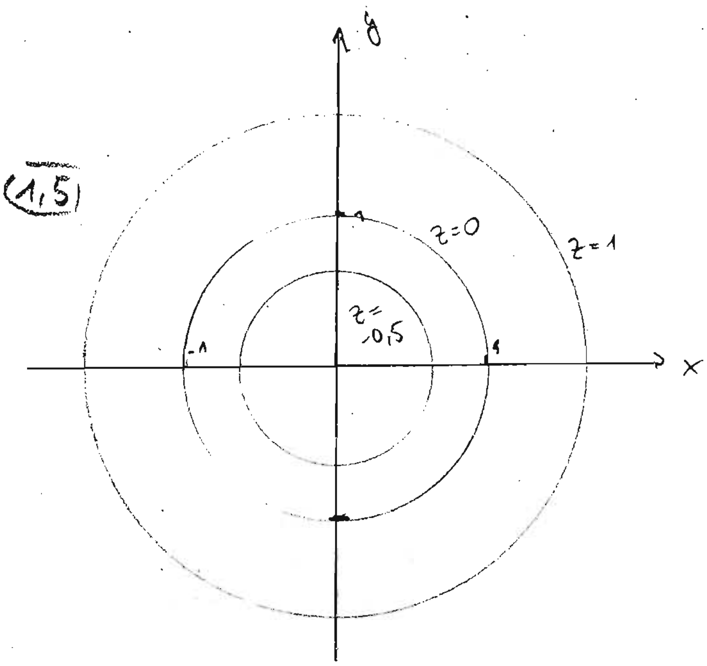
1,5

$z = -0,5 \Rightarrow \ln(x^2+y^2) = -0,5 \Rightarrow x^2+y^2 = e^{-0,5} = 0,607$
Kreis mit $r = 0,78$ $\Rightarrow x^2+y^2 = (0,779)^2$

$z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1^2$ Kreis mit $r = 1$

$z = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = e^1 \Rightarrow x^2+y^2 = (1,649)^2$, Kreis mit $r = $ [illegible]65

(1,5)



3,5 (d) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Geben Sie Art und Lage der Extremwerte an, soweit welche vorhanden sind ($z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$).

$z = \ln(x^2+y^2)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2} \qquad z_{yy} = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

je Ableitung 0,5

Extremwert:

$$\left.\begin{array}{lll} z_x = 0 & \Rightarrow x = 0 & \text{und } y \neq 0 \\ z_y = 0 & \Rightarrow y = 0 & \text{und } x \neq 0 \end{array}\right\} \text{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ kein Extremwert 1

1 (e) Beschreiben Sie mit Hilfe obiger Erkenntnisse die Form der Funktion.

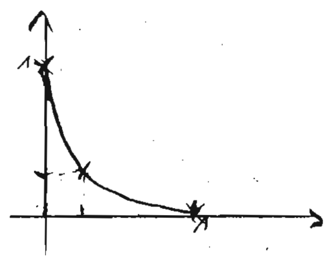
trichterförmig

5. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 7 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C : x(t) = t^2, \quad y(t) = (1-t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$\boxed{3}$ (a) Ermitteln Sie die Punkte P_A, P_B und P_C an den Stellen $t_A = 0$, $t_B = \frac{1}{2}$ und $t_C = 1$. Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe dieser 3 Punkte (1LE=2cm).



$\boxed{1{,}5}$

	t	x	y
$P_A(0,0) \Leftarrow$	0	0	1
$P_B(1/4, 1/4)$	1/2	1/4	1/4
$P_C(1,0)$	1	1	0

$\boxed{1{,}5}$

$\boxed{4}$ (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A zwischen den Koordinatenachsen und der Kurve C im Intervall $0 \leq t \leq 1$.

$$A = \int_0^1 |y \cdot \dot{x}|\, dt \qquad \dot{x} = 2t$$

$$= \int_0^1 |2t(1-t)^2|\, dt$$

Betrag kann weggelassen werden, da $t \in [0,1]$

$$= \int_0^1 (2t - 4t^2 + 2t^3)\, dt$$

$$= \left[t^2 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1$$

$$= 1 - 4/3 + 1/2 = 1/6$$

6. **Aufgabe: Maple** (/ ca. 7 Punkte)
ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN

3 (a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=2cm).

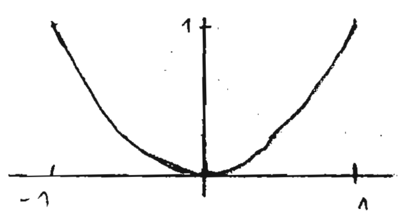
```
> f:=x->x^2;
```

$f := x \to x^2$

```
> A:=int(f(x),x=0..3);
```

$A := 9$

```
> plot(f(x),x=-1..1,scaling=constrained);
```



4 (b) Geben Sie die Maple-Befehle für die allgemeine und die spezielle Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 1 an ($y' = 1-(y-x)^2$, Anfangsbedingungen $x = 0, y = 1$).

```
> dgl:=diff(y(x),x)=1-(y(x)-x)^2;
```

$$dgl := \frac{d}{dx}\, y(x) = 1 - (y(x) - x)^2$$

2

```
> dsolve(dgl,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1 + x^2 - \_C1\, x}{x - \_C1}$$

1

```
> dsolve([dgl,y(0)=1],y(x));
```

$$y(x) = \frac{1 + x^2 + x}{x + 1}$$

1

```
>
```

7. **Aufgabe: Newton-Verfahren und Reihenentwicklung** **(/ ca. 7 Punkte)**
ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE NICHT DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN
Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) + 1 = \sinh(x) \quad x \geq 0.$$

3

(a) Bestimmen Sie die Lösung der obigen Gleichung mit dem Newtonverfahren auf 4 Stellen hinter dem Komma genau (Startwert: $x_0 = 1,4$).
(Hinweis: Überführen Sie die Gleichung zuerst in ein Nullstellenproblem.)

i	x_{i-1}	y_{i-1}	y'_{i-1}	x_i
1	1,4	0,081148	−1,980031	1,440965
2	1,440965	−0,002451	−2,101267	1,439798
3	1,439798	$-2,031 \cdot 10^{-6}$	−2,097786	1,439797 $= x_3$

3

(b) Bestimmen Sie die Lösung der obigen Gleichung mit Hilfe von Reihenentwicklung. Verwenden Sie dazu für die linke und rechte Seite der Gleichung jeweils die Taylor-Reihenentwicklung bis zum Glied x^5..

$$\sin x + 1 = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)$$
$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{3} = 1,4422$$

1

(c) Setzen Sie die Lösungen in die Gleichung ein. Welche der beiden angenäherten Lösungen erfüllt die Gleichung besser?

Newton: (1,4398) : 1,9914 = 1,9914

Taylor 1,9917 = 1,9569

Die Lösung des Newton-Verfahrens erfüllt die Gleichung besser