Lösung

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 06/07

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Warendorf, Pöschl, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung und Runge-Kutta-Verfahren
(/ ca. 12 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$xy' = x + 2y.$$

5

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.
(Hinweis: Bringen Sie sie zuerst auf die Form: $y' = \ldots$ und wenden dann Substitution an.)

$y' = 1 + \frac{2y}{x} \Rightarrow$ Subst: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow u' = \frac{f(u) - u}{x}$

$\Rightarrow u' = \frac{1 + 2u - u}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{x}$

Trennung der Variablen

$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C|$

$\Rightarrow 1+u = C \cdot x$

$\Rightarrow u = C \cdot x - 1$

Rücksubst:

$\frac{y}{x} = Cx - 1 \Rightarrow y = Cx^2 - x = x(Cx - 1)$

1

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 1, y_0 = y(x_0) = 2$

$y(1) = 2$

$\Rightarrow 2 = C - 1 \Rightarrow C = 3$

$\Rightarrow y_s = x \cdot (3x - 1)$

1

(c) Berechnen Sie die Lösung y_s an der Stelle $x = 2$ exakt.

$y_s(2) = 2 \cdot (3 \cdot 2 - 1) = 10$

5

(d) Berechnen Sie die Lösung an der Stelle $x = 2$ mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung in einem Schritt ($h = 1$, Anfangsbedingungen s. (b)).

$x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad h = 1, \quad x_1 = 2, \quad f(x) = 1 + 2\frac{y}{x}$

i	x	y	$K = 1 \cdot (1 + 2\frac{y}{x})$
0	1	2	5
	1,5	4,5	7
	1,5	5,5	8,3333
	2	10,3333	11,3333

$K = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 7,8333$

$y_1 = y_0 + K = 9,8333$

2. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung** (10 / ca. ~~11~~ Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y' - 12y = s_i(x).$$

2 (a) Berechnen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$y_h'' + y_h' - 12 y_h = 0$

charakt. Polynom:

$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4$

$\Rightarrow y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$

3 (b) Geben Sie den Ansatz an für die partikuläre Lösung für

i. $s_1(x) = x^2 e^{-4x}$

$y_p = x \cdot (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) e^{-4x}$

ii. $s_2(x) = e^{-3x} \cos x$

$y_p = e^{-3x} (A \sin x + B \cdot \cos x)$

iii. $s_3(x) = e^{+3x}$

$y_p = A \cdot x \cdot e^{3x}$

5 (c) Berechnen Sie die Lösung für die Störfunktion s_3.

$y_p = A \cdot x \cdot e^{3x}$

$\Rightarrow y_p' = A \cdot e^{3x} + 3Ax e^{3x}$

$y_p'' = 3A \cdot e^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$

Einsetzen:

$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} + A \cdot e^{3x} + 3Axe^{3x} - 12Axe^{3x} = e^{3x}$

$\Rightarrow 7Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{7} x e^{3x} \Rightarrow y = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{7} x e^{3x}$

4

4. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. ~~10~~ 11 **Punkte)**

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = e^{-x^2-2x-3y^2}.$$

5

(a) Berechnen Sie die Höhenlinie für $z = 1$ und zeichnen Sie sie (1LE=1cm). 2cm
(Hinweis: Sie müssen die quadratische Ergänzung verwenden, um die Form der Kurve zu erkennen.)

$$1 = e^{-x^2-2x-3y^2} \quad | \ln$$

$$\Rightarrow 0 = -x^2-2x-3y^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x+3y^2 = 0 \quad | \text{quadr. Erg}$$

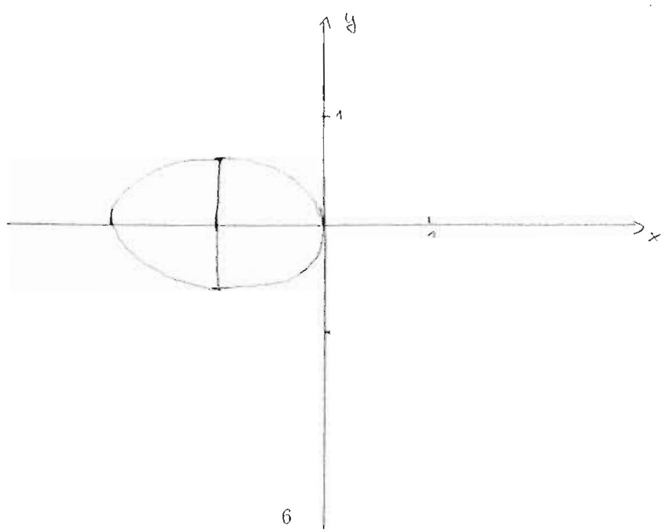
$$\Rightarrow (x^2+2x+1^2) + 3y^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 3y^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^2} = 1$$

4

verschobene Ellipse
mit HA: 1, $\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58$
Mittelpunkt: $(-1|0)$



1

6

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Geben Sie Art und Lage der Extrempunkte und der Sattelpunkte an, soweit welche vorhanden sind. ($z = f(x,y) = e^{-x^2-2x-3y^2}$).

$$z_x = (-2x-2)\, e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$z_{xx} = -2 \cdot e^{-x^2-2x-3y^2} + (-2x-2)^2 e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$= (-2+(-2x-2)^2)\, e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$z_{xy} = (-2x-2)(-6y)\, e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$z_y = (-6y)\cdot e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$z_{yy} = -6\, e^{-x^2-2x-3y^2} - 6y\cdot(-6y)\, e^{-x^2-2x-3y^2}$$

$$= (-6+36y^2)\, e^{-x^2-2x-3y^2}$$

4

E-Werte:

$z_x = 0 \Rightarrow -2x_E - 2 = 0 \Rightarrow x_E = -1$

$z_y = 0 \Rightarrow -6y_E = 0 \Rightarrow y_E = 0$

$\Delta = z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}^2$

$= (-2e^1)\cdot(-6e^1) - 0 = 12e > 0 \Rightarrow$ E-Wert

$z_{xx} = -2e < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum

Max $(-1|0|e)$

2

3. **Aufgabe: Taylor-Reihen** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \cos x \cdot \ln(x+1)$$

Bestimmen Sie die Glieder der Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) von $f(x)$ bis zur Potenz x^3.

$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

1 $\underline{f(0)} = \cos 0 \cdot \ln 1 = \underline{0}$

1 $f'(x) = -\sin x \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}$

1 $\underline{f'(0)} = 0 + 1 = \underline{1}$

2 $f''(x) = -\cos x \ln(x+1) - \sin x \cdot \frac{1}{x+1}$

$\cdot 1 \quad \frac{-\sin x\,(x+1) - \cos x}{(x+1)^2}$

$= -\cos x \ln(x+1) - 2\frac{\sin x}{x+1} - \frac{\cos x}{(x+1)^2}$

1 $\underline{f''(0)} = -1 \cdot 0 - 0 - 1 = \underline{-1}$

2 $f'''(x) = +\sin x \ln(x+1) - \frac{\cos x}{x+1}$

$-2\frac{\cos x\,(x+1) - \sin x}{(x+1)^2} - \frac{-\sin x\,(x+1)^2 - \cos x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$

$= \sin x \ln(x+1) - 3\frac{\cos x}{x+1} + \frac{3\sin x}{(x+1)^2} + \frac{2\cos x}{(x+1)^3}$

1 $\underline{f'''(0)} = 0 - 3 + 0 + 2 = \underline{-1}$

1 $\Rightarrow T_3(x) = \underline{\underline{x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}}$

Anderer Weg: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \ldots$

$\Rightarrow (1 - \frac{x^2}{2} \ldots)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^3}{2} \ldots$

5

$\Rightarrow T_3(x) = \underline{\underline{x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}}$

5. **Aufgabe: Ebene Kurve in Polarkoordinaten** (/ ca. ~~7~~ Punkte) 10

Gegeben ist die ebene Kurve in **Polarkoordinaten**

$$C: r(\varphi) = 10 \cdot \varphi^{-\frac{1}{4}} = \frac{10}{\sqrt[4]{\varphi}}, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi$$

3,5 (a) Berechnen Sie die ~~Steigung~~ Ableitung in Abhängigkeit von φ.

$y' = \frac{\dot r \sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}$

$\dot r(\varphi) = -\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \varphi^{-5/4} = -\frac{5}{2} \cdot \varphi^{-5/4}$

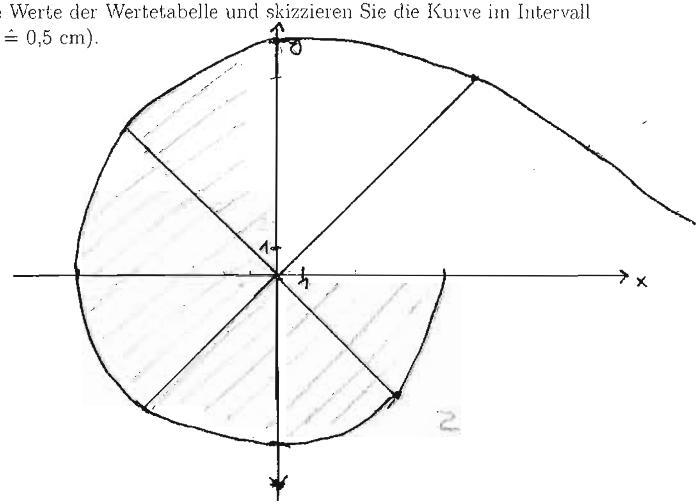
$\Rightarrow y' = \frac{-5/2\,\varphi^{-5/4}\sin\varphi + 10\,\varphi^{-1/4}\cos\varphi}{-5/2\,\varphi^{-5/4}\cos\varphi - 10 \cdot \varphi^{-1/4}\sin\varphi}$ 2,5

$= \frac{-1/4\,\varphi^{-1}\sin\varphi + \cos\varphi}{-1/4\,\varphi^{-1}\cos\varphi - \sin\varphi}$ 1

4,5 (b) Berechnen Sie die Werte der Wertetabelle und skizzieren Sie die Kurve im Intervall $0 < \varphi \leq 2\pi$ (1LE $\hat{=}$ 0,5 cm).

φ	$r(\varphi)$
$\to 0$	$\to \infty$
$\frac{\pi}{4}$	10,62
$\frac{\pi}{2}$	8,33
$\frac{3\pi}{4}$	8,07
π	7,51
$\frac{5\pi}{4}$	7,10
$\frac{3\pi}{2}$	6,73
$\frac{7\pi}{4}$	6,53
2π	6,32

2,5



2 c) Berechnen Sie die Fläche des Sektors im Intervall $[\pi/2, 2\pi]$ und schraffieren Sie die Fläche in Ihrer Zeichnung

$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} 100\,\varphi^{-1/2}\,d\varphi = 50 \cdot [2\,\varphi^{1/2}]_{\pi/2}^{2\pi}$

$= 100 \cdot [\sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi/2}] = 188{,}0$

6. **Aufgabe: Maple** (/ ca. ~~7~~ 8 Punkte)

(a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=2cm).

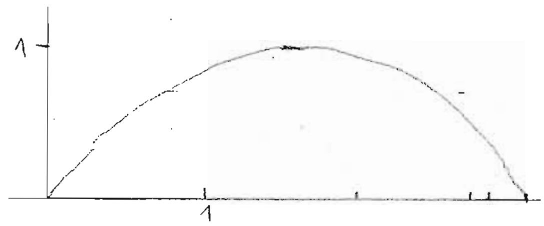
```
> f:=x->sin(x);
```

```
> int( f(x), x=0..Pi );
```

2

```
> plot(f,0..Pi);
```

4



+ Zeichnung

(b) Geben Sie die Maple-Befehle für die Berechnung der Höhenlinie aus Aufgabe 4 an ($z = f(x, y) = e^{-x^2-2x-3y^2}$, Höhenlinie bei $z = 1$). , z=2

4

> f:=(x,y) -> exp(-x^2 -2*x - 3*y^2);

> höhenlinien:={seq (f(x,y)=c, c=1..2)};

> plots[implicitplot]{höhenlinien, x = -20..0, y=-10..10);

Es muss ein gültiges Intervall vorgegeben sein.