Lösung

Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **WS 2007/2008**

Diplomvorprüfung in Mathematik II (Analysis) – Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl

WICHTIG :

Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Alle Prüfungsteilnehmer bearbeiten die Aufgaben 1-6.

Name:	Geb. – Datum	Punkte: (/ 72)
Vorname:	Stud.- Gruppe	Korr:
Raum/Platz-Nr:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: (Kurven, Parameterdarstellung, Sektorfläche, max = 18 Punkte)

Die ebene Kurve k habe die Parameterdarstellung:

$$x = \frac{1}{\sin(t)}, \; y = \cot(t) \quad \text{mit} \quad t \in \left]\, 0, \pi \,\right[.$$

P sei der zu dem Parameterwert $\frac{3\pi}{4}$ gehörige Punkt von k.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von P und die Steigung von k in P, sowie die Gleichung der Tangente an k in P. (/5)

$$(1) \quad x_P = \frac{1}{\sin(t_P)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \; ; \; y_P = \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \quad (1)$$

$$\dot{x} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} \Rightarrow \dot{x}_P = -\frac{-\sqrt{2}/2}{(\sqrt{2}/2)^2} = +\sqrt{2} \quad (1) \; ; \; \dot{y} = -\frac{1}{\sin^2 t} \Rightarrow \dot{y}_P = -2 \quad (1)$$

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = y'_P = \frac{\dot{y}_P}{\dot{x}_P} = \frac{-2}{+\sqrt{2}} = \frac{y-(-1)}{x-\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{2}\cdot x + 1} \quad (1)$$

b) Ermitteln Sie den Krümmungsradius ρ von k in P. (/7)

$$\ddot{x} = -\frac{-\sin^3 t - \cos t \cdot 2\sin t \cdot \cos t}{\sin^4 t} = +\frac{\sin^2 t + 2\cos^2 t}{\sin^3 t}$$

$$= +\frac{1 + \cos^2 t}{\sin^3 t} \quad (1) \qquad \Rightarrow \ddot{x}_P = +\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = +3\sqrt{2} \quad (1/2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{-2\sin t \cdot \cos t}{\sin^4 t} = +2\,\frac{\cos t}{\sin^3 t} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_P = 2\,\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -4 \quad (1/2)$$

$$\rho_P = \frac{1}{|k|} = \frac{\left\{\dot{y}_P^2 + \dot{x}_P^2\right\}^{3/2}}{\left|\dot{x}_P \cdot \ddot{y}_P - \ddot{x}_P \cdot \dot{y}_P\right|} = (1)$$

$$= \frac{\left\{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2\right\}^{3/2}}{\left|\sqrt{2}\cdot(-4) - 3\sqrt{2}\cdot(-2)\right|} = \frac{\{2+4\}^{3/2}}{2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= 3\sqrt{3} = 5{,}196152423 \quad (2)$$

c) Zeigen Sie, dass k in impliziter Form durch $x^2 - y^2 = 1$ mit $x > 0$ gegeben ist. (/1)

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) - \left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) = \frac{1 - \cos^2 t}{\sin^2 t} \quad (1)$$

$$= \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

d) Berechnen Sie den Inhalt A der Sektorfläche von k zwischen den Punkten S = (1,0) und P.

(/5)

$$x_S = 1 = \frac{1}{\sin t_S} \quad \Rightarrow \quad t_S = \frac{\pi}{2} \quad \text{(alle restl. Lsgn ausserhalb des } \mathbb{D}\text{)}$$

$$t_S < t_P \quad (1/2)$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_{t_S}^{t_P} \left\{y(t)\cdot\dot{x}(t) - x(t)\,\dot{y}(t)\right\} dt\right| = (1/2)$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \left\{\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) - \frac{1}{\sin t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\right\} dt\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int \left\{\frac{-\cos^2 t + 1}{\sin^3 t}\right\} dt\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sin^2 t}{\sin^3 t}\, dt\right| = \quad (1)$$

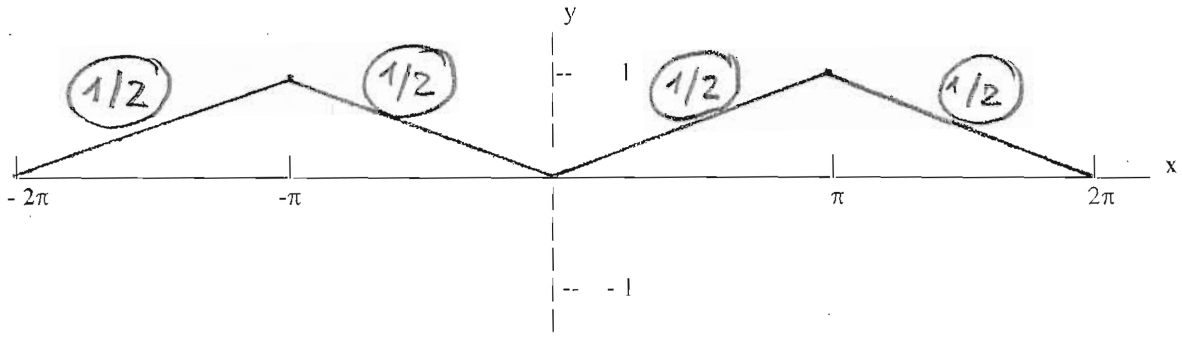
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{1}{\sin t}\, dt \;(1) = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|_{\pi/2}^{3\pi/4} \;(1) = \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right) - \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right|\right\}$$

$$= 0{,}4407 \quad (1)$$

Aufgabe 2 : (Fourierkoeffizienten, Fourierpolynom, max = 16 Punkte)

Durch $y = -\left(\frac{x}{\pi}\right)$ für $x \in [-\pi, 0[$ und $y = \frac{x}{\pi}$ für $x \in [0, \pi[$ sei eine ([redacted]gerade) Funktion mit der Periode 2π definiert.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi[$ (/2)



b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und b_3. (/7)

Funktion gerade $\Rightarrow$ $b_n = 0 = b_1 = b_2 = b_3$ (1)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^\pi = 1 \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\cancel{x\cdot\sin nx}}{n}\right]\Big|_0^\pi \quad (1)$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos(n\cdot\pi) - 1}{n^2}\right\} \quad (1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos 1\cdot\pi - 1}{1^2}\right\} = \frac{2}{\pi^2}(-1-1) = \boxed{\frac{-4}{\pi^2} = a_1} \quad (1)$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos 2\pi - 1}{2^2}\right\} = \boxed{0 = a_2} \quad (1)$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos 3\pi - 1}{3^2}\right\} = \boxed{\frac{-4}{9\pi^2} = a_3} \quad (1)$$

c) Geben Sie das Fourierpolynom $F_3(x)$ 3. Grades (d.h., den Teil der Fourierreihe bis einschließlich zu den Koeffizienten a_3 und b_3) an (/2)

$$F_3(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left\{\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x\right\} \quad 2$$

d) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \int_0^\pi f(x)dx$ und das Integral $I_2 = \int_0^\pi F_3(x)dx$. (/5)

Dabei sei $F_3(x)$ das Aufgabenteil c) ermittelte Fourierpolynom 3.Grades.

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\pi = 1{,}570796327 \quad 1/2$$

$$1$$

$$I_2 = \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos x - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3x)\right\}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{4}{\pi^2}\cdot\sin x - \frac{4}{9\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin(3x)\right]\Big|_0^\pi$$

$$1/2 \quad 1 \quad 1$$

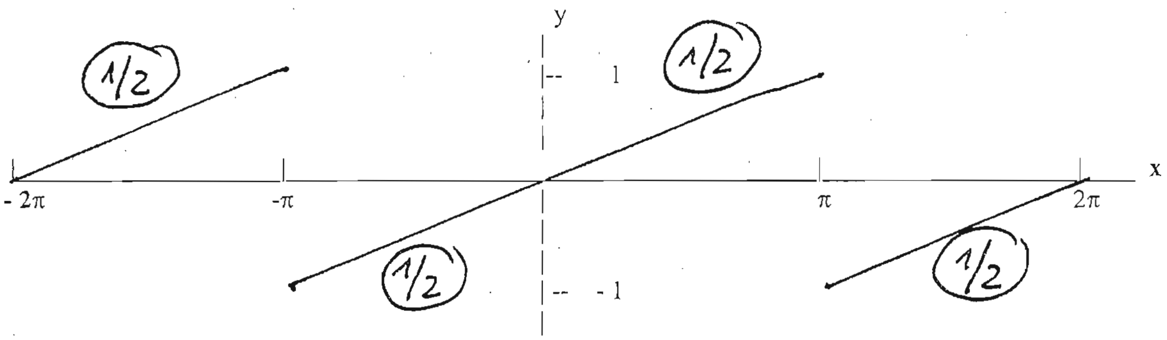
$$= \frac{1}{2}(\pi - 0) - \frac{4}{\pi^2}\left(\underbrace{\sin\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) - \frac{4}{27\pi^2}\left(\underbrace{\sin 3\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi = 1{,}570796327 \quad 1$$

Aufgabe 2 : (Fourierkoeffizienten, Fourierpolynom, max = 16 Punkte)

Durch $y = +\left(\frac{x}{\pi}\right)$ für $x \in [-\pi, 0[$ und $y = \frac{x}{\pi}$ für $x \in [0, \pi[$ sei eine (ungerade) Funktion mit der Periode 2π definiert.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi[$ (/2)



b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und b_3. (/7) 1

weil Funktion ungerade $\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$$b_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cdot\cos(nx)}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi} \quad 1$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left\{\underbrace{\frac{\sin(n\pi)}{n^2}}_{0} - \frac{\pi\cdot\cos(n\cdot\pi)}{n} - \underbrace{\frac{\sin 0}{n^2}}_{0} + \underbrace{\frac{0\cdot\cos 0}{n}}_{0}\right\} \quad 1$$

$$= -\frac{2}{n\cdot\pi}\cos(n\cdot\pi) \quad 1$$

$$b_1 = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos\pi = +2/\pi \quad 1$$

$$b_2 = -\frac{2}{2\pi}\cos 2\pi = 1/\pi \quad 1$$

$$b_3 = -\frac{2}{3\pi}\cdot\cos(3\pi) = +\frac{2}{3\pi} \quad 1$$

c) Geben Sie das Fourierpolynom $F_3(x)$ 3. Grades (d.h., den Teil der Fourierreihe bis einschließlich zu den Koeffizienten a_3 und b_3) an (/2)

$$F_3(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$$

$$= \left\{ +2 \cdot \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x \right\} \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin x - \frac{1}{\pi} \sin 2x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x \qquad 2$$

d) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \int_0^\pi f(x)dx$ und das Integral $I_2 = \int_0^\pi F_3(x)dx$. (/5)

Dabei sei $F_3(x)$ das in Aufgabenteil c) ermittelte Fourierpolynom 3.Grades.

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{x}{\pi} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad 1 \qquad 1/2$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \cdot (-\cos x) - \frac{1}{2} (-\cos 2x) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (-\cos 3x) \right\} \Big|_0^\pi$$

$$1/2 \qquad 1 \qquad 1$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -2 \cdot \cos \pi + 2 \cos 0 + \frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 0) \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9} (-\cos 3\pi + \cos 0) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ 2 + 2 + 2 \cdot \frac{2}{9} \right\} = 1{,}4147 \qquad 1$$

Abweichung: $-9{,}94\%$

Aufgabe 3 : (Funktion von zwei Variablen, Extremwerte, max = 7 Punkte)

Die Fläche F1 habe die Gleichung:

$z = f(x,y) = 3x + 8xy - 3x^2 - 6y^2$. (/7)

Man ermittle die Werte $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, in denen Extremwerte oder Sattelpunkte auftreten. Berechnen Sie bei eventuellen Extremwerten, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

1/2 $f_x = 3 + 8y - 6x$

1/2 $f_y = 8x - 12y \Rightarrow f_y \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$ 1

$f_x \stackrel{!}{=} 0 = 3 + 8y - 6 \cdot \frac{3}{2} y = 3 - y \Rightarrow \boxed{y_P = 3}$ 1/2

$\boxed{x_P = 4{,}5}$ 1/2

1/2 $f_{xx} = -6$

1/2 $f_{yy} = -12$

1/2 $f_{xy} = +8$

$\Rightarrow D_P = f^P_{xx} \cdot f^P_{yy} - (f^P_{xy})^2$

$= (-6) \cdot (-12) - (8)^2 =$ 1

$= 72 - 64 = +8 > 0$

$\Rightarrow$ in P existiert Extremum 1

Weil $f^P_{xx} < 0 \Rightarrow$ in P Maximum 1/2

P = (4,5 ; 3 ; 6,75)

Aufgabe 4: (Gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung, max = 11 Punkte)

Ermitteln Sie für die DGL $y' = \dfrac{y}{(1+x^2)}$ für $y>0$

a) Die allgemeine Lösung y (Trennung der Variablen) (/3)

$$1 \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1+x^2)} \;\Big|\int \Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C_1 \;\Big|\, e^{\cdots} \quad 1$$

$$y = e^{\arctan x + C_1} = C_1^* \cdot e^{\arctan x} \quad 1$$

b) Die spezielle Lösung durch den Punkt x = 1, y = 2. (/2)

$$2 = C_1^* \cdot e^{\arctan 1} = C_1^* \cdot e^{\pi/4} \quad 1/2$$

$$\Rightarrow C_1^* = 0{,}911876255 \approx 0{,}9119 \quad 1$$

$$y = 0{,}9119 \cdot e^{\arctan x} \quad 1/2$$

c) Mit dem Startwert $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ und der Schrittweite $h = 1$ berechne man den Wert $y(2)$ mit dem Runge Kutta Verfahren mit 8 Nachkommastellen, sowie **exakt** gemäß Aufgabenteil b). (/6)

$$y_{exakt}(x=2) = 0{,}9119 \cdot e^{\arctan 2} = 2{,}7590812 \quad 1$$

i	x_i	y_i	$k = 1 \cdot y/(1+x^2)$	
I	1	2	$k_1 = 2/(1+1) = 1{,}0$	1/2
II	1,5	2,5	$k_2 = 1 \cdot 2{,}5/(1+1{,}5^2) = 0{,}76923069$	1
III	1,5	2,384615384	$k_3 = \ldots = 0{,}73372781$	1
IV	2,0	2,73372781	$k_4 = \ldots = \cancel{0{,}56384615\,3}$ f 0,546745562	1

$$k = \frac{1}{6}\left[k_1 + 2(k_2+k_3) + k_4\right] = 0{,}75\cancel{9760552}\;877712 \quad 1$$

$$y_{R.K.}(x=2) \approx 2{,}75\cancel{9760552}\;877712 \quad 1/2$$

Aufgabe 5: (Lineare inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einem Parameter max = 11 Punkte)

Gegeben ist die DGL $y'' - \alpha y' - 4y = s(x)$.
$s(x)$ steht dabei für verschiedene Funktionen der rechten Seite, die später einzusetzen sind.

a) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL in Abhängigkeit vom Parameter α. (/2)

$$\lambda^2 - a\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+16}}{2} \quad (1)$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (1)$$

b) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL (/2)
Für $\alpha_1 = 0$ und Für $\alpha_2 = 3$

$$a_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} = \cancel{(C_1 + C_2 x) e^{2x}} \quad (1)$$

$$a_2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = +4 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} \quad (1)$$

c) Geben Sie die Ansätze für die Partikulärlösungen für folgende rechte Seiten an: (/3)

Für $\alpha_1 = 0$ und $s_1(x) = (1-x)e^{-x}$

$\alpha = -1$	$\mu = 1$	$\beta = 0$	$q = 0$

(1) $y_{p_1} = (b_0 + b_1 x) e^{-x}$

Für $\alpha_2 = 0$ und $s_2(x) = 3x^2 e^{2x}$

$\alpha = 2$	$\mu = 2$	$\beta = 0$	$q = 1$

(1) $y_{p_2} = x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) e^{2x}$

Für $\alpha_3 = 3$ und $s_3(x) = x e^{2x}$

$\alpha = 2$	$\mu = 1$	$\beta = 0$	$q = 0$

(1) $y_{p_3} = (b_0 + b_1 x) \cdot e^{2x}$

d) Berechnen Sie für den letzten Fall $\alpha_3 = 3$ und $s_3(x) = xe^{2x}$ (/5)
die spezielle Lösung der DGL für y(0) = 1 und y'(0) = 0.

$$y_p = (b_0 + b_1 x)e^{2x}$$

$$y_p' = (b_1 + 2b_0 + 2b_1 x)e^{2x} \quad 1/2$$

$$y_p'' = (2b_1 + 2b_1 + 4b_0 + 4b_1 x)e^{2x} \quad 1/2$$

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = x \cdot e^{2x}$$

$$\underbrace{(4b_1 + 4b_0 + 4b_1 x)}_{y_p''} - 3\underbrace{(b_1 + 2b_0 + 2b_1 x)}_{y_p'} - 4\underbrace{(b_0 + b_1 x)}_{y_p} = x \quad 1$$

Koef.-Vergleich in x^1

$$\cancel{4b_1} - 6b_1 - \cancel{4b_1} = 1 \rightsquigarrow \boxed{b_1 = -\frac{1}{6}} \quad 1/2$$

Koef.-Vergleich in x^0 1/2

$$4b_1 + \cancel{4b_0} - 3b_1 - 6b_0 - \cancel{4b_0} = 0 \Rightarrow b_1 = 6b_0 \Rightarrow \boxed{b_0 = -\frac{1}{36}}$$

$$y_{ges} = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{36}(1 + 6x)e^{2x} \quad 1/2$$

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2 - \frac{1}{36} \quad (*)$$

$$y_{ges}' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x} - \frac{1}{36}(8 + 12x)e^{2x} \quad 1/2$$

$$y'(0) = 4C_1 - C_2 - \frac{8}{36} = 0 \quad (**)$$

$$(*) + (**) \Longrightarrow 1 = 5C_1 - \frac{9}{36} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{4}} \text{ in } (**) \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{7}{9}} \quad 1/2$$

$$1/2 \quad \boxed{y_{ges} = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{7}{9}e^{-x} - \frac{1}{36}(1 + 6x)e^{2x}}$$

Aufgabe 6: (Numerische Integration) , max = 9 Punkte

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = xe^{-x^2}$ mit $x \in [0, 4]$.

Man berechne das Integral $\int_0^4 y(x)dx$ auf zweierlei Arten: 1

a) exakt mit geeigneter Substitution $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ (/3)

$$I_1 = \int_{x=0}^{4} x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{16} e^{-u} du = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]\Big|_0^{16} \quad 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-16} + e^{0}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - 0{,}113 \cdot 10^{-6}\right] = 0{,}499999438$$

1

b) numerisch nach der Simpson - Regel (Schrittweite h = 1) (/6)

i	x_i	y_i	
0	0	$0 \cdot e^{-0^2} = 0$	1
1	1	$1 \cdot e^{-1^2} = 0{,}36787944$	1
2	2	$2 \cdot e^{-2^2} = 0{,}036631277$	1
3	3	$3 \cdot e^{-3^2} = 0{,}000370229$	1
4	4	$4 \cdot e^{-4^2} = 0{,}0000004501$	1

$$I_2 = \frac{h}{3}\left\{(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{0 + 0{,}0000004501 + 2 \cdot 0{,}036631277 + 4 \cdot (0{,}36787944 + 0{,}000370229)\right\}$$

$$I_2 = 0{,}51542056 \quad 1$$