HOCHSCHULE MÜNCHEN   FAKULTÄT 03 FA   WS 08/09

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Bergmann, Hörwick, Kloster, Pöschl, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 8 Punkte)
   Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x \cdot y \cdot y' = 2x^2 + y^2$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung 1. Ordnung.
Hinweis: Bringen Sie die Differentialgleichung zuerst auf die Form $y' = \ldots$ und wenden dann das Verfahren der Substitution an.

(/ca. 6)

Ausgangsgl. durch $x \cdot y$ gekürzt

$$y' = 2\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2}{(y/x)} + \left(\frac{y}{x}\right) \quad (*)$$

Substitution: $\frac{y}{x} = u$ 1 $\Rightarrow y' = u + x \cdot u'$ 1

eingesetzt in $(*)$ $\Rightarrow$

$$\cancel{u} + x \cdot u' = \frac{2}{u} + \cancel{u} \Rightarrow u \cdot du = \frac{2}{x}dx \quad \Big| \int \quad 1/2$$

$$\frac{1}{2}u^2 = 2\ln|x| + C_1 \Rightarrow u^2 = 4\ln|x| + C_2$$

1/2   1

$$u = \pm\sqrt{4 \cdot \ln|x| + C_2} \quad 1/2$$

$$y(x) = \pm x \cdot \sqrt{4 \cdot \ln|x| + C_2} \quad 1/2$$

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Randbedingung:
$x_1 = 1, y_1 = y(x_1) = 4$.

(/ca. 2)

$$y(1) = 4 = 1 \cdot \sqrt{4 \cdot \underbrace{\ln|1|}_{0} + C_2} \quad 1/2$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 16 \quad 1/2$$

$$\leadsto y(x) = \pm x \cdot \sqrt{4 \cdot \ln|x| + 16} = \quad 1/2$$

$$y(x) = \pm 2 \cdot x \cdot \sqrt{\ln|x| + 4} \quad 1/2$$

2. Aufgabe: Ebene Kurven (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C : x(t) = 5\sin(2t), \quad y(t) = 5sin(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(a) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Kurve eine horizontale Tangente bzw. eine vertikale Tangente hat. Berechnen sie auch die zugehörigen Punkte. (/ca. 6)

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $\dot{y} = 5 \cdot \cos(t)$

$\dot{x} = 10 \cdot \cos(2t)$ 1/2

horizontale Tangente: $y' = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0$ 1/2

$5 \cdot \cos t = 0 \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \; ; \; t_2 = +\frac{3\pi}{2}$ 1/2

$H_1 = \left(5 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) ; 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0 ; +5)$ 1/2

$H_2 = \left(5 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) ; 5 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0 ; -5)$ 1/2

vertikale Tangente: $y' \to \pm\infty \Rightarrow \dot{x} = 0$ 1/2

$10 \cdot \cos(2t) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4} \; ; \; t_2 = \frac{3\pi}{4} \; ; \; t_3 = \frac{5\pi}{4} \; ;$

$t_4 = \frac{7\pi}{4}$ 1

$V_1 = \left(5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) ; 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(5 ; +\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 1/2

$V_2 = \left(5 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) ; 5 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(-5 ; +\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 1/2

$V_3 = \left(5 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) ; 5 \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(+5 ; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 1/2

$V_4 = \left(5 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) ; 5 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(-5 ; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Berechnen Sie den Punkt P und die Krümmung an der Stelle $t_p = \frac{\pi}{2}$.

(/ca. 4)

$$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

$$t_p = \pi/2$$

$$\dot{x} = 10\cdot\cos(2t) \qquad 1/2 \quad \dot{x}_p = 10\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -10$$

$$\dot{y} = 5\cdot\cos(t) \qquad 1/2 \quad \dot{y}_p = 5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{x} = -20\cdot\sin(2t) \; 1/2 \qquad 1/2 \quad \ddot{x}_p = -20\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{y} = -5\cdot\sin t \; 1/2 \qquad 1/2 \quad \ddot{y}_p = -5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$$

$$\varkappa_p = \frac{(-10)\cdot(-5) - 0\cdot 0}{\left\{(-10)^2 + 0^2\right\}^{3/2}} = \frac{+50}{10^3} = +0{,}05$$

1

$$P = \left(5\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right), 5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= (0, 5)$$

Name: ______________________

3. Aufgabe: Taylor-Reihen, Integralrechnung und Simpson-Regel
(/ ca. 12 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^x \cdot \sin(2x), \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

(a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_4(x)$ um $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) von $f(x)$ bis zur Potenz x^4.
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

$$e^x: T_{14}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad 1$$

(/ca. 5)

$$\sin(2x): T_{24}(x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{6} = 2x - \frac{4}{3}x^3 \quad 1$$

$$T_4(x): \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) = \quad 1$$

$$= 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 \quad 1$$

$$T_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^4 \quad 1$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ direkt (6 Nachkommastellen).

1

(/ca. 2)

$$I_1 = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} e^{1\cdot x} \cdot \sin(2\cdot x)\,dx = \left\{ \frac{e^x}{1+2^2}\left(1\cdot\sin(2x) - 2\cdot\cos(2x)\right)\right\}\Bigg|_{-\pi/4}^{+\pi/4}$$

$$= \frac{e^{\pi/4}}{5}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{+1} - 2\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\right) - \frac{e^{-\pi/4}}{5}\left(\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} - 2\cdot\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\right)$$

1/2

$$I_1 = \frac{e^{\pi/4}}{5} + \frac{e^{-\pi/4}}{5} = 0{,}438656 + 0{,}091188 =$$

$$= 0{,}529844 \quad 1/2$$

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} T_4(x)\mathrm{d}x$ (6 Nachkommastellen).

(/ca. 2)

$$I_2 = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \left(2x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^4\right) dx =$$

$$= \left[x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \quad 1$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 = 0{,}645964 - 0{,}119539 \quad 1/2$$

$$= 0{,}526425 \quad 1/2$$

(d) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ näherungsweise mit Hilfe der Simpson-Regel ($h = \frac{\pi}{8}$) (6 Nachkommastellen).

(/ca. 3)

$$f(0) = e^{-\pi/4} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}455938 \quad 1/2$$

$$f(1) = e^{-\pi/8} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}477461 \quad 1/2$$

$$f(2) = e^{0} \cdot \sin(0) = 0 \quad 1/2$$

$$f(3) = e^{+\pi/8} \cdot \sin\left(+\frac{\pi}{4}\right) = +1{,}047206 \quad 1/2$$

$$f(4) = e^{+\pi/4} \cdot \sin\left(+\frac{\pi}{2}\right) = +2{,}193280 \quad 1/2$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \cdot h \left\{ f_0 + f_4 + 4(f_1 + f_3) + 2 \cdot f_2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{8} \left\{ 2{,}193280 - 0{,}455938 + 4 \cdot (1{,}047206 - 0{,}477461) \right\}$$

$$= 0{,}525764 \quad 1/2$$

4. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
(/ ca. 10 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 2x$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 3)

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} = 0$ bzw

1 $16\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1}}{2 \cdot 16} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4}$ 1

$y_h = e^{\frac{1}{4}x}\{C_1 + C_2 x\}$ 1

(b) Geben Sie die Ansatzfunktion für die Berechnung der partikulären Lösung an.

(/ca. 1)

$y_p = b_0 + b_1 x$ 1

(c) Berechnen Sie die partikuläre Lösung.

(/ca. 3)

$y_p' = b_1 \quad y_p'' = 0$ 1/2

$0 - \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{16}(b_0 + b_1 x) = 2x$ 1/2

Koeff.-Vergleich in x^1: $\frac{1}{16}b_1 = 2 \Rightarrow \boxed{b_1 = 32}$ 1/2

Koeff-Vergleich in x^0: $-\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{16}b_0 = 0$ 1/2

$b_0 = 8 \cdot b_1 = \quad \boxed{b_0 = 256}$ 1/2

$y_p = 256 + 32x$ 1/2

(d) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 1)

$$y_{ges} = y_h + y_p = e^{\frac{1}{4}x}\{C_1 + C_2 x\} + 32x + 256$$ 1

(e) Berechnen Sie die spezielle Lösung y_s mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

(/ca. 2)

$$y(0) = 0 = 1 \cdot \{C_1 + 0\} + 0 + 256$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -256}$$ 1/2

$$y' = e^{\frac{1}{4}x}\{C_2 + \frac{1}{4}(C_1 + C_2 x)\} + 32$$ 1/2

$$y'(0) = 1 \cdot \{C_2 + \frac{1}{4}C_1\} + 32 = 1$$

$$1 = C_2 - 64 + 32 \Rightarrow \boxed{C_2 = 33}$$ 1/2

$$y_s = e^{\frac{1}{4}x}\{33 - 256x\} + 32x + 256$$ 1/2

Name: ______________________________

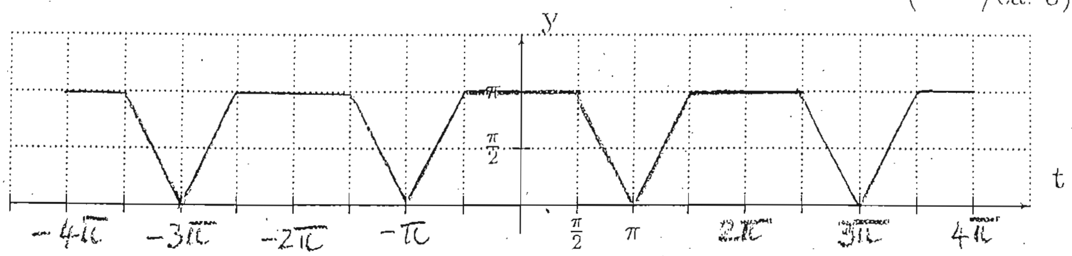
5. Aufgabe: Fourierreihen (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende gerade periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} \pi & \text{, für } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 2\pi - 2t & \text{, für } \frac{\pi}{2} < t \le \pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-4\pi, 4\pi[$.

1/2 1 1 1/2 (/ca. 3)



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten $(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$ und geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 2. Glied an: $F_2(t)$. (/ca. 7)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \pi\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (2\pi - 2t)dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\pi \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2\right\} = \boxed{\frac{3\pi}{2} = a_0} \quad 1/2$$

1/2 $b_1 = b_2 = 0$ (weil $f(t)$ gerade Fkt) 1/2

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \pi \cdot \cos t \cdot dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (2\pi - 2t)\cos t\, dt\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\pi \cdot \sin t\right]_0^{\pi/2} + 2\pi\left[\sin t\right]_{\pi/2}^{\pi} - 2\left[\cos t + t \cdot \sin t\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\}$$

1/2

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\left\{\pi(1-0) + 2\pi(0-1) - 2\left(-1 + \pi\cdot 0 - 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\cancel{\pi} - \cancel{2\pi} + 2 + \cancel{\pi}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{4}{\pi}} \quad 1/2$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos 2t\,dt = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2}\pi\cos 2t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(2\pi-2t)\cos 2t\,dt\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\pi\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} + \left[2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\pi/2}^{\pi} - 2\left[\frac{\cos 2t}{4} + \frac{t\sin 2t}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi(0-0) + \pi(0-0) - 2\cdot\frac{1}{4}\left(1-(-1)\right) - \frac{1}{2}(0-0)\right\} \quad 1/2$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot(-1) = -\frac{2}{\pi} \qquad \boxed{a_2 = -\frac{2}{\pi}} \quad 1/2$$

$$F_2(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + a_2\cos 2t \quad 1/2$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{2}{\pi}\cos 2t \quad 1/2$$

6. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3xy + 4x + 20.$$

(a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Extremwerte. Welchen Wert hat die Funktion an diesen Stellen?

(/ca. 5)

1/2 $z_x = 2x - 3y + 4 \stackrel{!}{=} 0$ (I)

1/2 $z_y = 6y - 3x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2y$ (II)

(II) in (I) $\Rightarrow 4y - 3y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y_E = -4} \ \boxed{x_E = -8}$

$z_E = (-8)^2 + 3(-4)^2 - 3\cdot(-8)\cdot(-4) + 4\cdot(-8) + 20$ 1 1/2 $\boxed{z_E = +4}$

1/2 $z_{xx} = 2$

1/2 $z_{yy} = 6$

1/2 $z_{xy} = -3$

$\Rightarrow D = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2 =$ 1/2

$= 2 \cdot 6 - (-3)^2 = 12 - 9 = +3$ 1/2

$D_E > 0,\ z^E_{xx} > 0 \Rightarrow$ in $E(-8; -4; +4)$: Minimum

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten (z=0) von dem Normalbereich $B: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ und oben von der gegebenen Fläche ($z = f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3xy + 4x + 20$) begrenzt wird.

(/ca. 3)

$$V = \int_{x=0}^{1} \left\langle \int_{y=0}^{1} \{x^2 + 3y^2 - 3xy + 4x + 20\} dy \right\rangle dx$$

1 $= \int_{x=0}^{1} \left[x^2(1-0) + 3\cdot\frac{1}{3}(1^3 - 0^3) - \frac{3}{2}x(1^2 - 0^2) + 4x(1-0) + 20(1-0)\right] dx$

1 $= \frac{1}{3}x^3 \cdot 1 + 1 \cdot x - \frac{3}{4}x^2 \cdot 1 + 2x^2 \cdot 1 + 20x \cdot 1 \Big|_0^1$

$V = \frac{1}{3} + 1 - \frac{3}{4} + 2 + 20$ 1/2

$V = 22{,}58333$ 1/2

(c) Berechnen und zeichnen (1LE =0.25cm) Sie die Schnittkurve mit der x, z-Ebene.

(/ca. 2)

x,z-Ebene $\Longleftrightarrow y = 0 \Rightarrow$

$z = x^2 + 4x + 20$ 1

$= (x+2)^2 + 16$

Parabel, nach oben geöffnet, mit Scheitel $(-2|16)$