

HOCHSCHULE MÜNCHEN

FAKULTÄT 03 FA

WS 0910

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Vielemeyer, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 60
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Matrikelnummer:		
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufgabe: Ebene Kurven (/ ca. 12 Punkte)

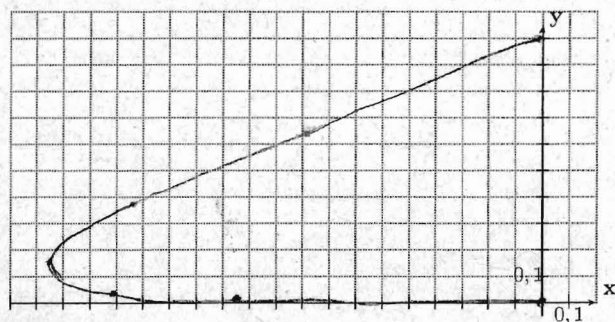
Gegeben ist die ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$C: x(t) = 5 \cdot t \cdot \ln(t), \quad y(t) = t^2 \quad 0 < t \leq 1$$

- (a) Füllen Sie die Wertetabelle (2 Nachkommastellen) aus und skizzieren Sie die Kurve (0,1 entspricht 1cm). Für $t = 0$ müssen Sie den Grenzwert (mit l'Hospital) berechnen.

t	x(t)	y(t)
0	Grenzwert: 0	0
0,1	-1,15	0,01
0,2	-1,61	0,04
0,4	-1,84	0,16
0,6	-1,53	0,36
0,8	-0,89	0,64
1,0	0	1

(1)



(1)

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \ln(t)}{\frac{1}{t}} \stackrel{\text{Hop.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{1}{t}}{\left(-\frac{1}{t^2}\right)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-5 \cdot t) = 0$$

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

- (b) Bestimmen Sie die Werte $t_0, x(t_0), y(t_0)$, wo die Kurve eine senkrechte Tangente hat.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y' \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{x} = 0 \quad (1/2) \quad (/ca. 3)$$

$$\dot{x}(t_0) = 5 \cdot \ln(t_0) + 5 = 0 \Rightarrow \ln(t_0) = -1 \quad | e^{\quad} \quad (1/2)$$

$$t_0 = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,36 \quad (1/2)$$

$$x(t_0) = \frac{5}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1,84 \quad (1/2)$$

$$y(t_0) = \frac{1}{e^2} = 0,135 \quad (1/2)$$

- (c) Berechnen Sie die Krümmung an dieser Stelle t_0 (gleiche Stelle wie bei Aufgabenteil (b)). Falls Sie t_0 nicht bestimmen konnten, berechnen Sie die Krümmung am Ersatzwert $t_E = e^{-1}$.

$$\ddot{x} = 5 \ln(t) + 5 \Rightarrow \ddot{x}(t_0) = 0 \quad (1/2) \quad (/ca. 3)$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{t}$$

$$\ddot{x}(t_0) = 5e \quad (1/2)$$

$$\dot{y} = 2t$$

$$\dot{y}(t_0) = \frac{2}{e} \quad (1/2)$$

$$\ddot{y} = 2$$

$$\ddot{y}(t_0) = 2 \quad (1/2)$$

$$\kappa_0 = \frac{\dot{x}(t_0) \cdot \ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0) \cdot \dot{y}(t_0)}{\left\{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2\right\}^{3/2}} = \frac{0 \cdot 2 - 5e \cdot \frac{2}{e}}{\left\{0^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^2\right\}^{3/2}} \quad (1/2)$$

$$= \frac{-10}{\left(\frac{8}{e^3}\right)} = -25,11 \quad (1/2)$$

- (d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve von $t_A = 0,5$ bis $t_B = 1$ mit dem Simpsonverfahren ($h = 0,25$, also 2 Intervalle).

Bemerkung: Das Simpsonverfahren für 2 Intervalle ist identisch mit der Keplerschen Fassregel.

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (/ca. 3)$$

$$\textcircled{1/2} f_0 = f(t_A) = \sqrt{[5 \cdot \ln(0,5) + 5]^2 + (2 \cdot 0,5)^2} = 1,83488$$

$$\textcircled{1/2} f_1 = f(t_A + h) = \sqrt{[5(\ln(0,75) + 1)]^2 + (2 \cdot 0,75)^2} = 3,86457$$

$$\textcircled{1/2} f_2 = f(t_B) = \sqrt{[5(\ln(1) + 1)]^2 + (2 \cdot 1)^2} = 5,385165$$

$$L = \frac{h}{3} \{f_0 + 4f_1 + f_2\} = 1,88957 \quad \textcircled{1}$$

2. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen (/ ca. 9 Punkte)
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 - 2y^2 + x^2y - 8y.$$

(a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen der Funktion

$$f_x = 2x + 2xy \Rightarrow f_{xx} = 2 + 2y \quad (/ \text{ca. } 1)$$

$$f_y = -4y + x^2 - 8 \Rightarrow f_{yy} = -4$$

↓

$$f_{xy} = 2x \quad (\text{je } 0,2 \text{ f\"ur jede richtige Abl.})$$

(b) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte. Geben Sie dabei jeweils die Lage und bei den Extremwerten auch den Typ an.

$$f_x \stackrel{!}{=} 0 = 2x(1+y) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \quad \textcircled{1/2} \\ y_2 = -1 \quad \textcircled{1/2} \end{array} \right. \quad (/ \text{ca. } 5)$$

$$f_y \stackrel{!}{=} 0 = x^2 - 4y - 8 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -2 \quad \textcircled{1/2} \\ x_2^2 = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{21} = 2 \\ x_{22} = -2 \end{array} \right\} \quad \textcircled{1/2} \end{array} \right.$$

$$P_1 = (0, -2, +8) \quad P_{21} = (2, -1, +6) \quad P_{22} = (-2, -1, +6)$$

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (2 + 2y)(-4) - (2x)^2$$

4

$$z_{P_1} = 0^2 - 2 \cdot (-2)^2 + 0^2 \cdot (-2) - 8 \cdot (-2) = +8; \quad z_{P_{21}} = z_{P_{22}} = 2^2 - 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot (-1) - 8 \cdot (-1) = +6 \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1} D_1 = (2 + 2 \cdot (-2)) \cdot (-4) - (2 \cdot 0)^2 = +8 > 0 \Rightarrow \text{Extremum}$$

$$\text{da } f_{yy} = -4 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$\textcircled{1} D_{21} = (2 + 2 \cdot (-1)) \cdot (-4) - (2 \cdot 2)^2 = -16 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\textcircled{1} D_{22} = (2 + 2 \cdot (-1)) \cdot (-4) - (2 \cdot (-2))^2 = -16 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1; 3; z_P)$.

(/ ca. 3)

$$z_P = z(1, 3) = 1^2 - 2 \cdot 3^2 + 1^2 \cdot 3 - 8 \cdot 3 = -38 \quad \textcircled{1/2}$$

$$f_x^P = 2x_P + 2x_P y_P = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 8 \quad \textcircled{1/2}$$

$$f_y^P = -4y_P + x_P^2 - 8 = -3 \cdot 4 + 1^2 - 8 = -19 \quad \textcircled{1/2}$$

$$z = z_P + f_x^P (x - x_P) + f_y^P (y - y_P) \quad \textcircled{1/2}$$

$$= -38 + 8(x - 1) - 19(y - 3) \quad \textcircled{1/2}$$

$$= 8x - 19y + 11 \quad \textcircled{1/2}$$

5

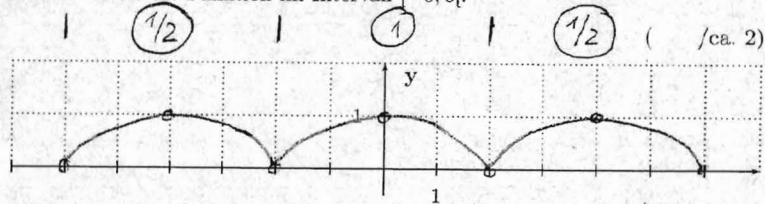
3. Aufgabe: Fourierreihen

(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende periodische Funktion mit der Periode $T = 4$

$$f(t) = 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \text{für } -2 \leq t \leq 2, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-6, 6]$.



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten (a_0, a_n, b_n) .

(/ca. 5)

Funktion symmetrisch $\Rightarrow b_n = 0$ (1)

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right\} dt = t - \frac{1}{12} t^3 \Big|_0^2 \quad (1/2)$$

$$a_0 = \frac{4}{3} \quad (1/2)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos \frac{2n\pi \cdot t}{T} dt = \frac{4}{4} \int_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right\} \cos \frac{n\pi t}{2} dt \quad (1/2)$$

$$= \left\{ \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi t}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{2 \cdot t \cdot 4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi t}{2} + \left(\frac{2^3 \left(\frac{n^2 \pi^2}{2^2} \cdot t^2 - 2 \right)}{\pi^3 \cdot n^3} \right) \sin \frac{n\pi t}{2} \right] \right\} \Big|_0^2 \quad (1)$$

$$= \frac{2}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin 0) - \frac{1}{4} \left[\frac{16}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) \right]$$

$$+ \left(\frac{8}{n\pi} - \frac{16}{n^3 \pi^3} \right) \cdot \sin(n\pi) - 0 - 0 \quad (1)$$

Fortsetzung Aufgabe: Fourierreihen

$$a_n = -\frac{4}{n^2 \pi^2} \cdot (-1)^n \quad (1/2)$$

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 4. Glied an: $F_4(t)$.

(/ca. 3)

$$a_1 = +\frac{4}{\pi^2} \quad (1/2)$$

$$a_2 = -\frac{1}{\pi^2} \quad (1/2)$$

$$a_3 = +\frac{4}{9\pi^2} \quad (1/2)$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\pi^2} \quad (1/2)$$

$$F_4(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^4 \left(a_j \cos \frac{j\pi t}{2} + b_j \sin \frac{j\pi t}{2} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ 4 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \cos(\pi t) + \frac{4}{9} \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \cos(2\pi t) \right\} \quad (1)$$

8a

4. Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung (/ ca. 11 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right) \quad \text{mit } x > 0, y \geq 0.$$

- (a) Berechnen Sie die Werte (2 Nachkommastellen) für y' in Abhängigkeit von x und y und tragen Sie diese in die Tabelle ein.

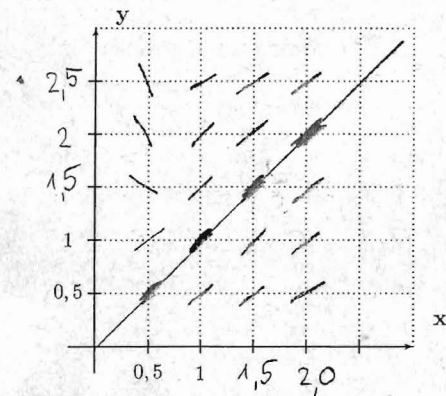
(/ca. 2)

$y \backslash x$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0,5	1,00	0,61	-0,30	-1,55	-3,05
1,0	0,84	1,00	0,89	0,61	0,21
1,5	0,70	0,93	1,00	0,95	0,82
2,0	0,57	0,85	0,96	1,00	0,97

(0,1 Pkt
je richt.
Wert)

- (b) Zeichnen Sie das Richtungsfeld für $0 < x \leq 2$ und $0 < y \leq 2,5$.

(/ca. 2)



9a

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung mittels Substitution und geben Sie die allgemeine Lösung an.

$$\textcircled{1/2} \quad u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u \quad (/ca. 5)$$

$$\textcircled{1/2} \quad u' \cdot x + u = u \cdot \left\{ \ln\left(\frac{1}{u}\right) + 1 \right\}$$

$$u' \cdot x = u \cdot \ln\left(\frac{1}{u}\right) \quad \textcircled{1/2}$$

$$\frac{du}{u \cdot \ln\left(\frac{1}{u}\right)} = - \frac{du}{u \cdot \ln(u)} = \frac{dx}{x} \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad \int \frac{du}{u \cdot \ln(u)} \stackrel{\text{Partiell}}{(343)} - \ln|\ln(u)| = \ln|x| + C_1 \quad \textcircled{1}$$

$$\ln|u| = C^* \cdot \frac{1}{x} \quad \textcircled{1/2}$$

$$\textcircled{1/2} \quad u = \frac{y}{x} = e^{C^*/x} \Rightarrow y = x \cdot e^{\frac{C^*}{x}} \quad \textcircled{1/2}$$

- (d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
 $x_0 = 1, y_0 = y(x_0) = 1.$

$$y(x=x_0=1) = 1 = 1 \cdot e^{C^*/1} \Rightarrow C^* = 0 \quad (/ca. 1)$$

$$y = x \quad \textcircled{1/2}$$

- (e) Zeichnen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
 $x_0 = 1, y_0 = y(x_0) = 1$ in das Diagramm aus b) ein.

(/ca. 1)

5. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 2y' - 3y = s(x)$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

charakt. Gl. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ (1/2) (/ca. 2,5)

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\lambda_1 = +3 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

(b) Berechnen Sie die partikuläre Lösung für $s(x) = 2 \cosh(x) = e^x + e^{-x}$.

$$s(x) = e^x + e^{-x} \quad s_1(x) = e^x; \quad s_2(x) = e^{-x} \quad (/ca. 5)$$

Zu $s_1(x) = e^x$: $y_p = A \cdot e^x \Rightarrow y_p' = A e^x \Rightarrow y_p'' = A e^x$ (1/2)

$$A \cdot e^x \{1 - 2 - 3\} = e^x \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$y_{p_1} = -\frac{1}{4} e^x$$

Zu $s_2(x) = e^{-x}$

$$y_{p_2} = B \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$y_{p_2}' = B e^{-x} (1 - x)$$

$$y_{p_2}'' = B e^{-x} (-1 - 1 + x) = B e^{-x} (-2 + x)$$

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

$$B e^{-x} \{-2 + x - 2(1 - x) - 3\} = e^{-x}$$

$$B \cdot (-4) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{4} x \cdot e^{-x}$$

$$y_{\text{ges}} = y_{p_1} + y_{p_2} = -\frac{1}{4} (e^x + x e^{-x})$$

(c) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an.

$$y_{\text{ges}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} x e^{-x} \quad (/ca. 1)$$

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte:

$$x_0 = 0, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 4$$

$$(*) \quad 0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{4}$$

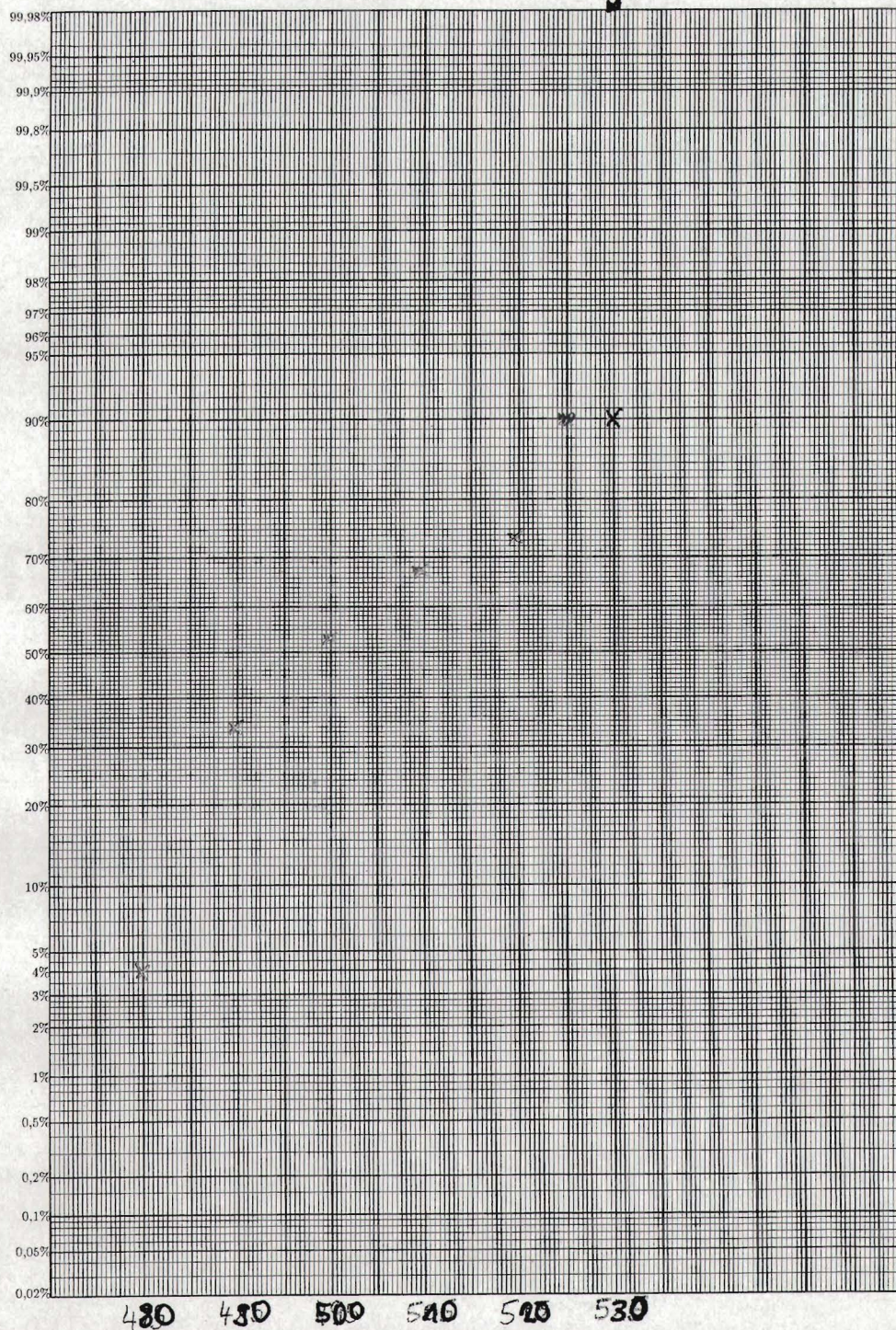
$$y_{\text{ges}}' = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} - \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} x e^{-x}$$

$$(**) \quad 4 = 3C_1 - C_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$(*) + (**) \Rightarrow 4 = 4C_1 - \frac{3}{4} \Rightarrow C_1 = \frac{19}{16}$$

$$\text{Aus } (*) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4} - C_1 = -\frac{15}{16}$$

$$y_{\text{ges}} = \frac{19}{16} e^{3x} - \frac{15}{16} e^{-x} - \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} x e^{-x}$$



6. Aufgabe: Statistisches Verfahren (/ ca. 7 Punkte)

Zwei Maschinen sind so eingestellt, dass Konservendosen mit 500g Gemüße gefüllt werden. Die tatsächliche Masse der Füllung weicht zufällig vom Sollwert 500g ab.

(a) Bei Maschine A kann man die Masse X als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert 505g und der Standardabweichung 30g auffassen.

i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Maschine A weniger als 490g in einer Dose enthalten sind.

$$P(X < 490) = \Phi\left(\frac{490 - 505}{30}\right) = \Phi(-0,5) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(+0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

≈ 31% (/ca. 1)

ii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Maschine A mehr als 515g in einer Dose enthalten sind.

$$P(X > 515) = 1 - P(X < 515) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{515 - 505}{30}\right) = 1 - \Phi(0,3) =$$

$$= 1 - 0,6293 = 0,3707 \approx 37\% \quad \left(\frac{1}{2}\right) \quad (/ca. 1)$$

(b) Bei Maschine B wurden zufällig 50 Dosen ausgewählt und gewogen. Es ergibt sich die folgende Aufstellung.

(/ca. 5)

Untere Klassen- grenze in g	Obere Klassen- grenze in g	Anzahl	m_i	h_i	$r_i = \frac{h_i}{n}$	$r_i^{(k)}$
470	480	2	475	2	0,04	0,04
480	490	15	485	15	0,30	0,34
490	500	10	495	10	0,20	0,54
500	510	7	505	7	0,14	0,68
510	520	3	515	3	0,06	0,74
520	530	8	525	8	0,16	0,90
530	540	5	535	5	0,10	1,00

$$\sum 50 = n$$

Stellt die Füllmasse bei Maschine B eine normalverteilte Zufallsgröße dar?
Benutzen Sie das Wahrscheinlichkeitspapier und begründe Sie Ihre Aussage.

12
nein, weil die Punkte nicht auf
einer Geraden liegen