HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA WS 10/11

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller:	Kloster, Pöschl, Radtke, Schlüchtermann, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 52 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 11 Punkte)
Eine Kurve in Parameterdarstellung ist durch

$$\mathcal{C} : x(t) = 5 \cdot t - 5 \cdot t^2, \quad y(t) = 4 \cdot t^4 - 4 \cdot t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

gegeben.

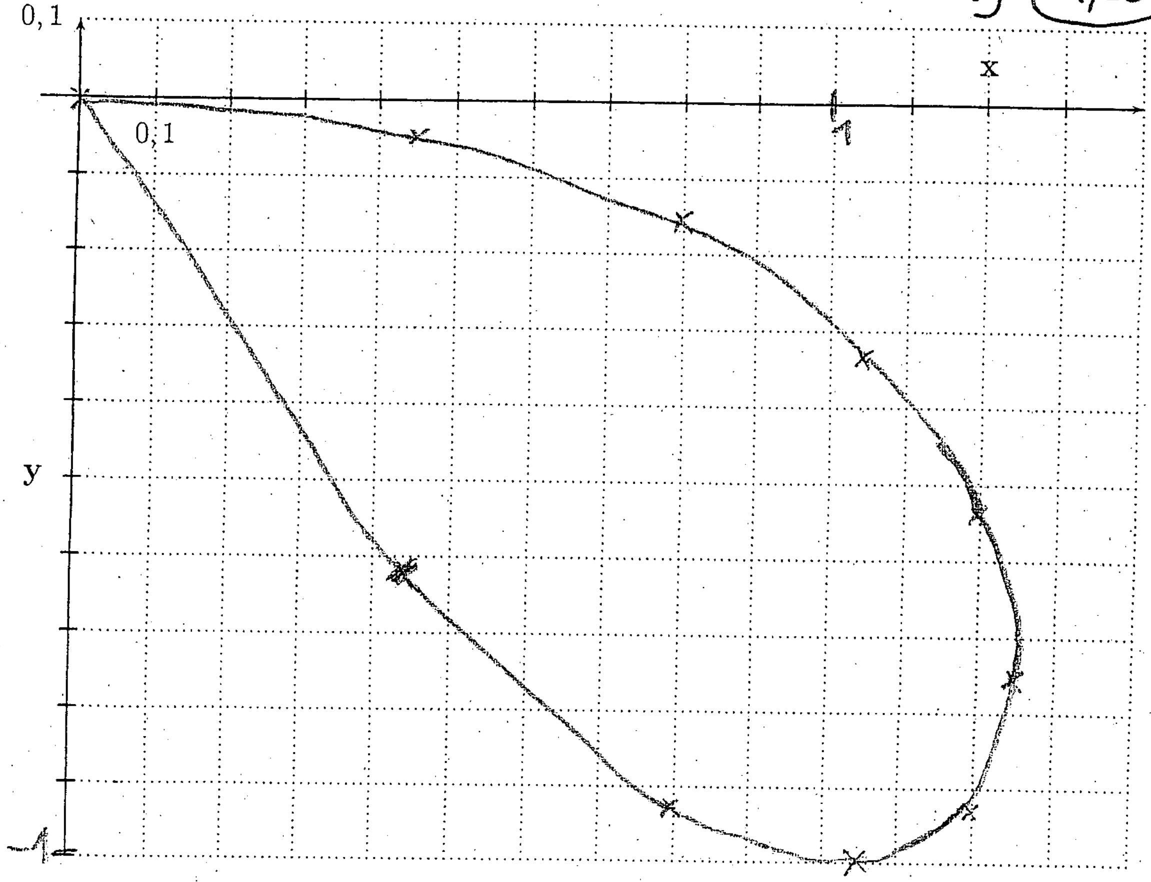
(a) Füllen Sie die Wertetabelle für die y-Werte(2 Nachkommastellen) aus und skizzieren Sie die Kurve (0, 1 entspricht 1cm).

(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0,00	0.00
0,1	0,45	−0,04
0,2	0,80	−0,15
0,3	1,05	−0,33
0,4	1,20	−0,54
0,5	1,25	−0,75
0,6	1,20	−0,92
0,7	1,05	−1,00
0,8	0,80	−0,92
0,9	0,45	−0,62
1,0	0,00	0,00

0,25 pro Punkt, insgesamt 2,75

Zeichnung 1,25



(b) Bestimmen Sie die Werte

i. $t_h, x(t_h), y(t_h)$, wo die Kurve eine horizontale Tangente hat.

ii. $t_v, x(t_v), y(t_v)$, wo die Kurve eine vertikale Tangente hat.

(/ca. 4)

i) horizontale Tangente: $\dot{y} = 0$, $\dot{x} \neq 0$

$\dot{x} = 5 - 10t$ (1/2)

$\dot{y} = 16t^3 - 8t$ (1/2) | $\dot{y}(t_h) = 0 \Rightarrow 16t_h(t_h^2 - \frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow t_{h_1} = 0$ (1/2), $t_{h_2} = +\sqrt{1/2}$ (1/2), $t_{h_3} = -\sqrt{1/2} \notin D$

$\dot{x}(0) \neq 0$, $\dot{x}(\sqrt{1/2}) \neq 0$ ✓

$\Rightarrow t_{h_1} = 0 \Rightarrow P_1(0/0)$ (1/2), $t_{h_2} = +\sqrt{1/2} \Rightarrow P_2(1{,}04/-1)$ (1/2)

ii) vertikale Tangente: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} \neq 0$ ✓

$\dot{x}(t_v) = 0 \Rightarrow 5 - 10t_v = 0 \Rightarrow t_v = 1/2$ (1/2) $\dot{y}(1/2) \neq 0$ ✓

$\Rightarrow P_v(1{,}25 / -0{,}75)$ (1/2)

(c) Welche Krümmung hat die Kurve bei $t = 0,5$?

(/ca. 3)

$$\varkappa = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

(1/2) $\ddot{x} = -10$, $\ddot{y} = 48t^2 - 8$ (1/2)

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(0{,}5) = 0 \\ \ddot{x}(0{,}5) = -10 \\ \dot{y}(0{,}5) = -2 \\ \ddot{y}(0{,}5) = 4 \end{array}\right\} (1) \Rightarrow \varkappa = \frac{0 \cdot 4 - (-10) \cdot (-2)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2}^3} = -\frac{5}{2} \; (1)$$

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ **ca. 8 Punkte**)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 2x + 3y + 7.$$

(a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Extremwerte und Sattelpunkte , deren Lage und den Funktionswert, sowie bei den Extremwerten deren Typ.

(/ca. 4)

$f_x(x,y) = 2x + 2$ 1/2

$f_y(x,y) = -6y + 3$ 1/2

$f_x(x_E, y_E) = 0 \Rightarrow 2x_E + 2 = 0 \Rightarrow x_E = -1$ 1/2

$f_y(x_E, y_E) = 0 \Rightarrow -6y_E + 3 = 0 \Rightarrow y_E = +1/2$ 1/2

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_{yy}(x,y) = -6 \\ f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}\right\}$$ 1

$\Delta = f_{xx}(x_E, y_E) \cdot f_y(x_E, y_E) - f_{xy}(x,y)^2 = -12 < 0$ ✓

$\Rightarrow$ Es handelt sich um einen Sattelpunkt bei $S(-1 \mid -1/2 \mid 6\,3/4)$

✓ 1/2 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der in der xy-Ebene vom Quadrat $B: 0 <= x <= 1, 0 <= y <= 1$ und oben von der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt wird.

(/ca. 4)

$$V = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 - 3y^2 + 2x + 3y + 7)\, dx\, dy \quad 1/2$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 - 3y^2x + x^2 + 3yx + 7x \right]_0^1 dy \quad 1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - 3y^2 + 1 + 3y + 7 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{25}{3} + 3y - 3y^2 \right) dy \quad 1$$

$$= \left[\frac{25}{3} y + \frac{3}{2} y^2 - y^3 \right]_0^1 \quad 1$$

$$= \frac{25}{3} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{53}{6} \quad 1/2$$

3. **Aufgabe: Reihenentwicklung und Simpson-Verfahren** (/ **ca. 9 Punkte**)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 6 \cdot \cos(x) \cdot \cosh(x) + 4$$

(a) Berechnen Sie das Polynom $T_4(x)$ der Mc-Laurin-Reihe (Taylorreihe an der Stelle $x = 0$).
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

(/ca. 4)

$$f_1(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad 1/2$$

$$f_2(x) = \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad 1/2$$

$$f(x) = 6 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \dots\right) + 4 \quad 1$$

$$= 6 + 3x^2 + \frac{1}{4}x^4 \dots$$

$$- 3x^2 - \frac{3}{2}x^4$$

$$+ \frac{1}{4}x^4 \dots \quad + 4 \quad 1$$

$$= 10 - x^4 \dots$$

$$\Rightarrow T_4(x) = 10 - x^4 \quad 1$$

Fortsetzung Aufgabe: Simpson-Verfahren und Reihenentwicklung

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 T_4(x)\mathrm{d}x$

(/ca. 1,5)

$$\int_0^2 (10 - x^4)\,dx = \left[10x - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \quad (1)$$

$$= 20 - \frac{32}{5} = 13{,}6 \quad (1/2)$$

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ mit dem Simpson-Verfahren mit der Schrittweite $h = 0,5$ (mit 4 Nachkommastellen).

(/ca. 3,5)

$$I = (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \cdot \frac{h}{3} \quad (1/2)$$

$$y_0 = f(0) = 0{,}0000 \quad (1/2)$$

$$y_1 = f(0{,}5) = 9{,}9375 \quad (1/2)$$

$$y_2 = f(1) = 9{,}0024 \quad (1/2)$$

$$y_3 = f(1{,}5) = 4{,}9984 \quad (1/2)$$

$$y_4 = f(2) = -5{,}3938 \quad (1/2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6}\left(0{,}0000 - 5{,}3938 + 4(9{,}9375 + 4{,}9984) + 2 \cdot 9{,}0024\right)$$

$$= 13{,}7258 \quad (1/2)$$

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = (4 - x - y)^2$$

(a) Welche Form haben die Isoklinen (mit Begründung)? (/ca. 1)

$y' = m$. 1/2

$\Rightarrow (4 - x - y)^2 = m$

$\Rightarrow 4 - x - y = \sqrt{m} \Rightarrow y = 4 - x - \sqrt{m}$ 1/2

$\Rightarrow$ Geraden mit $m \geq 0$

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$. (/ca. 4)

Substitution:

$u = 4 - x - y$ 1/2

$\Rightarrow f(u) = u^2$

$\Rightarrow u' = -1 - u^2 = (-1)(1 + u^2)$ 1/2

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = (-1)(1 + u^2)$ 1/2

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \int (-1)\,dx$

$\Rightarrow \arctan u = -x + C$ 1/2

$\Rightarrow u = \tan(-x + C)$ 1/2

Rücksubstitution:

$4 - x - y = \tan(-x + C)$ 1/2

$\Rightarrow y = 4 - x - \tan(-x + C)$ 1/2

(c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = 4 - \pi$.

(/ca. 3)

$4 - \pi = 4 - \pi - \tan(-\pi + c)$ 1

$\Rightarrow \tan(-\pi + c) = 0$ 1

$\Rightarrow c = k \cdot \pi$ 1

$\Rightarrow y_s = 4 - \pi - \tan(-x + k \cdot \pi)$ 1

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (/ ca. 9 Punkte)

Ein (schnell) schmelzender Eisklotz der Anfangsmasse m hängt an einer Feder, außerdem gibt es noch eine geschwindigkeitsabhängige Reibung. Bei geeigneter Wahl der Größen kann sich dabei folgende Differentialgleichung für das schwingende System ergeben:

$$\ddot{s} + 2\dot{s} + 5s = 10 - 5t$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine homogene Lösung $s_h = s_h(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2,5)

1/2 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

1/2 $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$ 1

$\Rightarrow s_h(t) = e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right)$ 1/2

(b) Berechnen Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) $s = s(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

/ca. 3)

$\alpha = 0$ ist <u>nicht</u> Lösung der char. Gleichung ✓

$\Rightarrow$ Ansatzfunktion:

$$\left.\begin{aligned} s_p &= b_1 t + b_0 \\ \dot{s}_p &= b_1 \\ \ddot{s} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ einsetzen in DGL}$$ 1

$\Rightarrow 0 + 2b_1 + 5b_1 t + 5b_0 = 10 - 5t$

Koeffizientenvergleich:

$5b_1 = -5 \Rightarrow b_1 = -1$ 1/2

$2b_1 + 5b_0 = 10 \Rightarrow b_0 = \frac{12}{5}$ 1/2

$\Rightarrow s_p = -t + \frac{12}{5}$ 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\Rightarrow \quad s(t) = -t + \frac{12}{5} + e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right)$$

1/2

(c) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte:

$$t_0 = 0, s(t_0) = 1, \dot{s}(t_0) = 0$$

1/2

$$\dot{s}(t) = -1 - e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right) + e^{-t}\left(2C_1 \cos(2t) - 2C_2 \sin(2t)\right)$$

(/ca. 3,5)

Einsetzen der Anfangswerte:

$$s(0) = 1 \Rightarrow \frac{12}{5} + 1(0 + C_2) = 1$$ 1/2

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{7}{5}$$ 1/2

1/2

$$\dot{s}(0) = 0 \Rightarrow -1 - (0 + C_2) + (2C_1 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 2C_1 = 1 + C_2$$ 1/2 $$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{5}$$ 1/2

$$\Rightarrow S_{AB}(t) = -t + \frac{12}{5} + e^{-t}\left(-\frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{7}{5}\cos(2t)\right)$$

1/2

6. **Aufgabe: Komplexe Zahlen** (/ ca. 7 **Punkte**)

Gegeben sind die zwei komplexen Zahlen:

$$z_1 = 8j \quad und \quad z_2 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Rechnen Sie jeweils mit **2 Nachkommastellen**.

(a) Berechnen Sie

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

Geben Sie die Lösung in arithmetischer Form und in Exponentialform an.

(/ca. ~~3~~) 2

$z_1 = 8\, e^{j\pi/2}$

$\Rightarrow z_3 = \dfrac{8\, e^{j\pi/2}}{1 \cdot e^{j\pi/3}} = 8\, e^{j(\pi/2 - \pi/3)} = \underline{\underline{8\, e^{j\pi/6}}}$ 1

$= 8 \cdot (\cos \pi/6 + j \sin \pi/6) = \underline{\underline{6{,}93 + 4{,}00j}}$ 1

(b) Berechnen Sie

$$z_4 = \sqrt[3]{z_3}.$$

Geben Sie die Lösungen in arithmetischer Form und in Exponentialform an.

Formel: $z_{4,k} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{j\left(\frac{\pi/6}{3} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}\right)}$ 1/2 (/ca. ~~2~~) 3

$k=0: \; z_{4,0} = 2 \cdot e^{j\pi/18} = 2\left(\cos\frac{\pi}{18} + j \sin\frac{\pi}{18}\right)$

$= 1{,}97 + 0{,}35j$

1/2

$k=1: \; z_{4,1} = 2 \cdot e^{j\left(\pi/18 + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{j\, 13/18\, \pi}$ 1

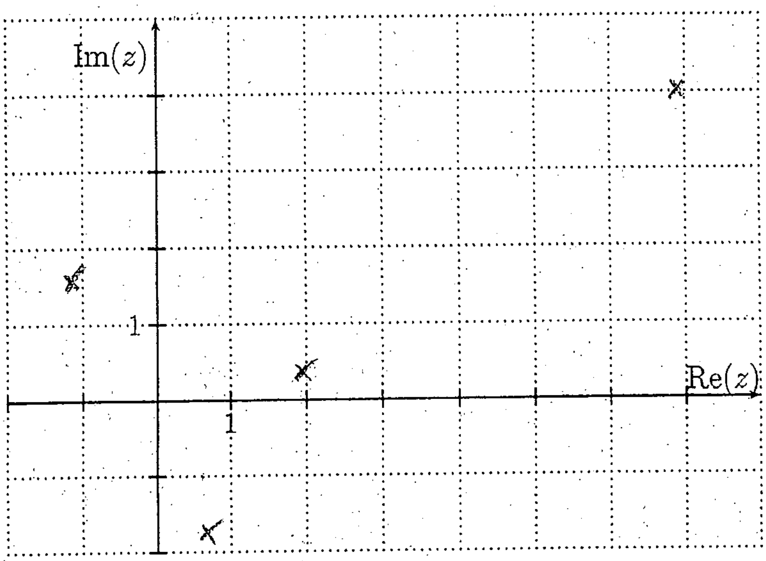
$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{13}{18}\pi\right) + j \sin\left(\frac{13}{18}\pi\right)\right) = -1{,}29 + 1{,}53j$

$k=2: \; z_{4,2} = 2 \cdot e^{j\left(\pi/18 + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{j \frac{25}{18}\pi}$ 1

$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{25}{18}\pi\right) + j \sin\left(\frac{25}{18}\pi\right)\right) = -0{,}68 - 1{,}88j$

(c) Zeichnen Sie z_3 und z_4(alle Lösungen) in die gegebene Gauß'sche Zahlenebene.

(/ca. 2)



1/2 je Punkt