Hochschule München Fakultät 03 FA WS 11/12

Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Mahnke, Pöschl, Warendorf

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: 60 / ca. Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufg. 12
2. " 10
3. " 10
4. " 12
5. " 7
6. " 9

60

1. Aufgabe: Ebene Kurven (/ ca. 12 Punkte)

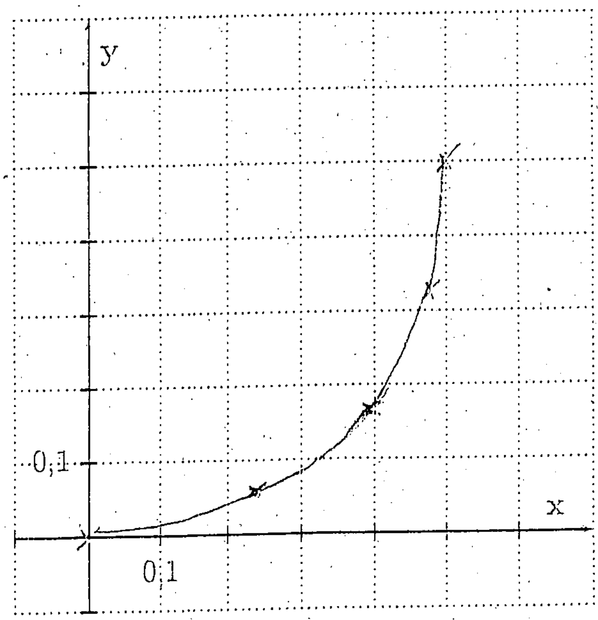
Gegeben ist die ebene Kurve

$$C : x(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle (2 Nachkommastellen) und skizzieren Sie die Kurve.

(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$	
0	0	0	1/2
0,25	0,24	0,05	1/2
0,5	0,40	0,17	1/2
0,75	0,48	0,32	1
1	0,50	0,50	1



1/2

(b) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t, x(t) und y(t)), wo eine senkrechte bzw. waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

(/ca. 4)

$$\dot{x} = \frac{(1+t^2) - t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad 1$$

$$\dot{y} = \frac{2t(1+t) - t^2 \cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} = \frac{t(t+2)}{(1+t)^2} \quad 1$$

vert. Tang.: $y' \to \infty \Rightarrow \dot{x} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t_v = 1 \Rightarrow \overbrace{x_v = 0{,}5;\ y_v = 0{,}5}^{1/2}$ 1/2

hor. Tang.: $y' \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow t_h = 0 \Rightarrow \underbrace{x_h = 0;\ y_h = 0}_{1/2}$ 1/2

+ 1 Zeichnung der Tangenten (Skizze)

(c) Welche Bogenlänge hat die Kurve von $t = 0$ bis $t = 1$?

i. Zeigen Sie zuerst, dass Sie für die Bogenlänge folgendes Integral berechnen müssen:

$$s = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{t^2(2+t)^2}{(1+t)^4}}\,dt$$

ii. Berechnen Sie die Bogenlänge näherungsweise mit der Simpsonregel mit der Schrittweite $h = 0{,}5$. Wenn Sie ein anderes Integral zur Berechnung von s erhalten haben, verwenden Sie das angebene s.

(/ca. 4)

$$s = \int_{t_{A}}^{t_E} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{t^2(t+2)^2}{(1+t)^4}}\,dt = \int_0^1 a(t)\,dt \quad 1$$

t	a
0	1
0,5	0,734195
1	0,75

$$s = \frac{1}{3} h \{a_0 + 4a_1 + a_2\} \quad 1/2$$

$$= \frac{0{,}5}{3} \{1 + 4 \cdot 0{,}734195 + 0{,}75\}$$

$$s = 0{,}7811 \quad 1$$

2. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot (y + 1) - 1$$

(a) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

(/ca. 6)

1/2 $f_x = 2x + 2x(y+1) = 2x(y+2)$

1/2 $f_y = (x^2 - 1)$

1/2 $f_{xx} = 2 + 2(y+1) = 2(y+2)$

1/2 $f_{yy} = 0$

1/2 $f_{xy} = 2x$

$f_x \stackrel{!}{=} 0 \implies y = -2$ 1/2

$f_y \stackrel{!}{=} 0 \implies x_1 = +1 ; x_2 = -1$
1/2 1/2

$P_1 = (+1 ; -2 ; 0)$
$P_2 = (-1 ; -2 ; 0)$ 1/2

1

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2(y+2) \cdot 0 - (2x)^2 = -4x^2 < 0$

$\Rightarrow$ sowohl bei P_1 wie auch bei P_2

Sattelpunkt 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(b) Nun sei $f(x, y)$ auf die Gerade $g : y = -2x$ beschränkt (d.h. Sie müssen in f $y = -2x$ setzen). Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $f(x; y)$ auf die Gerade g an der Stelle $E_1(1; -2)$ ein lokales Maximum besitzt.

(/ca. 4)

$$f_g(x) = x^2 + (x^2-1)(-2x+1) - 1$$

$$= x^2 - 2x^3 + 2x + x^2 - 1 - 1$$

$$= 2(-x^3 + x^2 + x - 1) \quad (1)$$

$$f_g'(x) = 2\{-3x^2 + 2x + 1\} \overset{!}{=} 0 \quad (1/2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-3)\cdot 1}}{2\cdot(-3)} = \frac{-2 \pm 4}{-6}$$

$$x_1 = +1 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{3} \quad (1/2) \qquad x_m = +1$$

$$f_g''(x) = -12x + 4 \quad (1/2)$$

$$f_g''(x_m = +1) = -12 \cdot 1 + 4 = -8 < 0 \quad (1/2)$$

$\Downarrow$ Maximum

$$y_m = -2x_m = -2 \cdot 1 = -2 \quad (1/2)$$

$\Downarrow$

bei $E_1 = (1; -2)$

3. Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \cot(x) \cdot y = \cos(x)\,, \quad \text{mit } \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ 0 < x < \pi$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (/ca. 8)

$$y_h' = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y_h = \frac{dy_h}{dx} \qquad 1/2$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx \quad \Big|\int \qquad 1/2$$

$$\ln|y_h| = -\ln|\sin(x)| + C \quad |e \qquad 1$$

$$y_h = \frac{\tilde{C}}{\sin(x)} \qquad 1$$

Variation der Konstanten

$$y = \frac{K(x)}{\sin(x)} \Rightarrow y' = \frac{K' \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot K}{\sin^2(x)} \qquad 1$$

$$y' = \frac{K'(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{K(x)}{\sin(x)} = \frac{K'(x)}{\sin(x)} - \cot(x) \cdot y$$

$$y' + \cot(x) \cdot y = \underbrace{\frac{K'(x)}{\sin(x)} \cancel{- \cot(x) \cdot y} + \cancel{\cot(x) \cdot y}}_{y'} = \cos(x) \qquad 1$$

$$K'(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \qquad 1/2$$

$$dK(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)\, dx \quad \Big| \int \qquad 1/2$$

$$K(x) = -\frac{1}{4} \cos(2x) + D \qquad 1/2$$

$$y = \frac{K(x)}{\sin(x)} = \frac{-\frac{1}{4}\cos(2x) + D}{\sin(x)} \qquad 1/2$$

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $y_0 = y(x_0) = 0$. (/ca. 2)

$$y\left(x = x_0 = \frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{-\frac{1}{4}\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + D}{\sin(\pi/2)} \qquad 1/2$$

$$0 = \frac{-\frac{1}{4} \cdot (-1) + D}{1} \quad 1/2 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{4} \quad 1/2$$

$$y_{sp} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos(2x) + 1}{\sin(x)} \qquad 1/2$$

NA

4. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
(/ ca. 12 Punkte)

Es sei $a > 0$. Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung

$$a^2 y'' + y = \sin(2x)$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$ an.

(/ca. 2)

$$a^2 \cdot \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4a^2 \cdot 1}}{2a^2} = \pm \frac{2aj}{2a^2} = \pm \frac{1}{a} j \quad 1$$

$$y_h = A \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{x}{a}\right) \quad 1$$

(b) Bestimmen Sie die Ansatzfunktionen zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$. (Achtung: Fallunterscheidung!)

(/ca. 2)

$$a = \frac{1}{2}: \quad y_p = x \cdot \left\{C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)\right\} \quad 1$$

$$a \neq \frac{1}{2}: \quad y_p = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) \quad 1$$

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung für $a \neq \frac{1}{2}$ in Abhängigkeit von $a > 0$.

(/ca. 6)

$$y_{ges} = A \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B\cos\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) \quad 1$$

$$y''_{ges} = -\frac{A}{a^2}\sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{B}{a^2}\cos\left(\frac{x}{a}\right) - 4C_1 \sin(2x) - 4C_2 \cos(2x) \quad 1$$

Eingesetzt in die DGL

1

$$A \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) - B \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right) - 4C_1 a^2 \sin(2x) - 4C_2 a^2 \cos(2x) + A \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) = \sin(2x)$$

Koef. - Vergl. in $\sin(2x)$: $C_1(1-4a^2) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{1-4a^2}$ 1/2 1/2

" " " $\cos(2x)$: $C_2(1-4a^2) = 0$ 1/2 $\Rightarrow C_2 = 0$ 1/2

$$y_{ges} = A \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B\cos\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\sin(2x)}{1-4a^2} \quad 1$$

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung zu $a = 2$ und den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ (Aufgabenteil (c) verwenden!!!).

(/ca. 2)

$$y(0) = 0 = A \cdot \sin(0) + B\cos 0 + \frac{\sin(0)}{1-16}$$

$\Rightarrow B = 0$ 1/2

$$y'(x) = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{B}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2 \cdot \cos(2x)}{1-16} \quad 1/2$$

$$y'(0) = 0 = \frac{A}{2}\cos(0) + \frac{2}{-15} \Rightarrow A = \frac{4}{15} \quad 1/2$$

$$y_{sp} = \frac{4}{15}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin(2x)}{15} \quad 1/2$$

5. Aufgabe: Taylorreihen (/ ca. 6 Punkte)

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin(x) \quad \text{mit } x \geq 0$$

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe T_4 um $x_0 = 0$ bis zur Potenz x^4.

(/ca. 2)

1 $f(x) = x \cdot \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \right\}$

1 $T_4(x) = x^2 - \frac{1}{6} x^4$

(b) Lösen Sie angenähert die transzendente Gleichung $x \cdot \sin(x) = 4x^2 - 0{,}5$, in dem Sie die linke Seite der Gleichung durch T_4 ersetzen, so dass eine biquadratische Gleichung entsteht.

Prüfen Sie durch Einsetzen nach wie gut die Lösung die transzendente Gleichung erfüllt.

(/ca. 4)

$x^2 - \frac{1}{6} x^4 = 4x^2 - 0{,}5 \quad | \cdot 6$

$x^4 + 18x^2 - 3 = 0$ 1/2

Subst.: $x^2 = u > 0$ 1/2

$u^2 + 18u - 3 = 0$ 1/2

$u_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot (-3)}}{2}$ 1/2

$u_1 = \frac{-18 + \sqrt{336}}{2} = 0{,}16515139$ 1/2

$x = \pm \sqrt{u_1} = \pm 0{,}40638224$ 1/2

1/2

Kontrolle: $0{,}40638224 \cdot \sin(0{,}40638224) = 0{,}160642968$

$4 \cdot 0{,}40638224^2 - 0{,}5 = 0{,}1605$[illegible] 1/2

6. Aufgabe: Fehlerrechnung mit totalem Differential (/ ca. 8 Punkte)

Die potentielle Energie E_{pot} zweier sich anziehender Körper berechnet sich wie folgt:

$$E_{pot} = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

mit:

m_1, m_2: Massen der sich anziehenden Körper, r: Abstand der sich anziehenden Körper und $G = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\,s^2}$: Gravitationskonstante. Folgende Werte werden gemessen:

- Masse 1: $m_1 = 20000$kg mit einer Messungenauigkeit von $dm_1 = \pm 0{,}30$kg.
- Masse 2: $m_2 = 15000$kg mit einer Messungenauigkeit von $dm_2 = \pm 0{,}25$kg.
- Abstand der Körper: $r = 2$m mit einer Messungenauigkeit von $dr = \pm 0{,}05cm$.

(a) Berechnen Sie potentielle Energie E_{pot} mit den gemessenen Werten m_1, m_2 und r (G können Sie als Konstante stehen lassen).

$$E_{pot} = -6{,}6742 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 15 \cdot 10^3}{2} \left[\frac{kg\,m^2}{s^2}\right]$$

(/ca. 1)

$$= -0{,}0100113\ \frac{kg\,m^2}{s^2} = -1{,}00113 \cdot 10^{-2}\ Nm \quad 1$$

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von E_{pot} nach m_1, nach m_2 und nach r.

(/ca. 3)

$$1)\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial m_1} = -\frac{G\,m_2}{r} = -5{,}00565 \cdot 10^{-7} \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$1)\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial m_2} = -\frac{G \cdot m_1}{r} = -6{,}6742 \cdot 10^{-7} \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$1)\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial r} = +\frac{G\,m_1 m_2}{r^2} = +5{,}00565 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]$$

(c) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler mit den oben gegebenen Messungenauigkeiten unter Verwendung des totalen Differentials.

(/ca. 4)

$$1)\ dE = 5{,}00565 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}30 + 6{,}6742 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}25 + 5{,}00567 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2{,}82 \cdot 10^{-6}\ Nm$$

$$\text{rel Fehler} = \left|\frac{dE}{E_{pot}}\right| = \frac{2{,}82 \cdot 10^{-6}}{1{,}00113 \cdot 10^{-2}} = 2{,}82 \cdot 10^{-4} \quad 1$$

$$= 0{,}0282\,\%$$