Hochschule München | Fakultät 03 FA | WS 12/13

Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster,Mahnke, Pöschl,Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!**

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. 51 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Lösung + Pkt-Verteilung

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C: x(t) = t \cdot (\ln(t) - 0{,}5), \quad y(t) = t^2 - 1, \quad 0 < t \leq 1$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle (2 Nachkommastellen) und skizzieren Sie die Kurve.
(ACHTUNG: Für $t \to 0$ müssen Sie einen Grenzwert bilden.

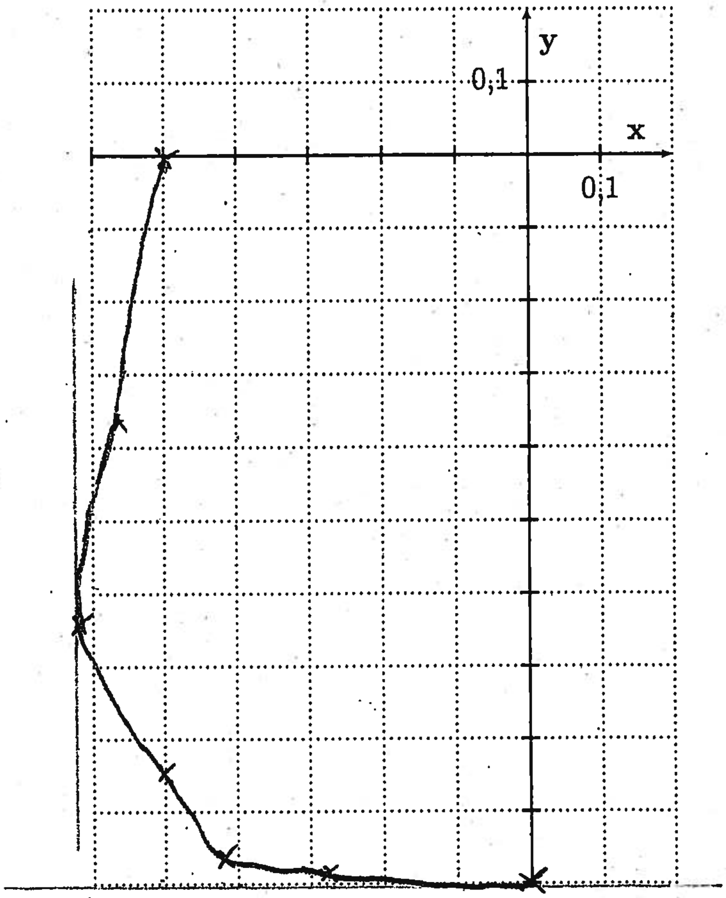
(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$
$t \to 0$	0	−1
0,1	−0,28	−0,99
0,2	−0,42	−0,96
0,4	−0,57	−0,84
0,6	−0,61	−0,64
0,8	−0,58	−0,36
1	−0,5	0

je 0,25

je 0,25

$\leq 1{,}75$



$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln t - 0{,}5}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{(-1)\cdot t^{-2}} = \lim_{t\to 0} -\frac{t^2}{t} = 0$$

1

Skizze 1,25

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t, x(t) und y(t)), wo eine senkrechte bzw. waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

(/ca. 4)

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\dot{x} = \ln(t) - 0{,}5 + t \cdot \frac{1}{t} = \ln(t) + 0{,}5 \quad 1$$

$$\dot{y} = 2t \quad 1/2$$

waagerechte Tangente

$\dot{y} = 0 \Rightarrow 2t_w = 0 \Rightarrow t_w = 0 \quad (\dot{x}(0) \neq 0)$

Entweder: $t_w \notin D \Rightarrow$ keine waagerechte Tangente

1

oder: $t_w = 0 \Rightarrow x_w = 0, \; y_w = -1$

senkrechte Tangente:

$\dot{x} = 0 \Rightarrow \ln(t) = -0{,}5 \Rightarrow t_s = 0{,}6065 \quad (\dot{y}(t_s) \neq 0)$

$\Rightarrow x_s = -0{,}61 \; , \; y_s = -0{,}63$

1

Zeichnen der Tangente(n): 1/2

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{1 + y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

(/ca. 6)

$$f_x = \frac{y}{1+y^2} \qquad 1/2$$

$$f_y = \frac{x(1+y^2) - xy2y}{(1+y^2)^2} = \frac{x + xy^2 - 2xy^2}{(1+y^2)^2} = \frac{x(1-y^2)}{(1+y^2)^2} \qquad 1$$

Extrem-/Sattelpunkte:

$f_x = 0 \Rightarrow y_E = 0$ 1/2

$f_y = 0 \Rightarrow x_E = 0$ 1/2

1/2

$f_{xx} = 0$

$$f_{yy} = \frac{-2xy(1+y^2)^2 - x(1-y^2) \cdot 2 \cdot (1+y^2) \cdot 2y}{(1+y^2)^4}$$

Wer erkennt, dass f_{yy} nicht berechnet werden muss, da $f_{xx}=0$ erhält auch einen Punkt 1

$$f_{xy} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \qquad 1/2$$

$$\left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)\Big|_{\substack{x_E=0 \\ y_E=0}} = 0 - 1 = -1 \qquad 1/2$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $S(0;0;0)$ 1

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten (z=0) von dem Normalbereich $B: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ und oben von der gegebenen Fläche ($z = f(x,y) = \frac{x \cdot y}{1+y^2}$) begrenzt wird.

(/ca. 3)

$$V = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{y}{1+y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{y}{1+y^2} \right]_0^1 dy$$ 1/2

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} \, dy$$ 1/2

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot \ln(1+y^2) \right]_0^1$$ 1

$$= \frac{1}{4} (\ln 2 - \ln 1) = 0{,}1733$$ 1

Var. d. Konstanten:

$$y = \frac{k(x)}{x+1} \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{k'(x)\cdot(x+1) - k(x)}{(x+1)^2} \qquad 1/2$$

Einsetzen in DGL:

$$\frac{k'(x)}{x+1} - \frac{k(x)}{(x+1)^2} + \frac{k(x)}{(x+1)^2} = \cos x \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = (x+1)\cdot\cos x \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = \int (x\cdot\cos x + \cos x)\,dx \qquad 1/2$$

$$= \cos x + x\sin x + \sin x + C \qquad 1/2$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung

$$y = \frac{\cos x + x\sin x + \sin x + C}{x+1} \qquad 1/2$$

3. Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung **(/ ca. 7 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \frac{1}{x+1} \cdot y = \cos(x), \quad 0 < x < 2\pi$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(/ca. 7)

Lösungsverfahren: Variation d. Konstanten

<u>Lösung d. hom. DGL:</u>

$$y_h' + \frac{1}{x+1} \cdot y_h = 0$$ 1/2

$$\Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -\frac{1}{x+1} \cdot y_h$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y_h}\, dy_h = -\int \frac{1}{x+1}\, dx$$ 1/2

$$\Rightarrow \ln|y_h| = -\ln(x+1) + C$$

$$\Rightarrow y_h = \pm e^{-\ln(x+1)+C} = \underbrace{\pm e^{C}}_{K} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow y_h = K \cdot \frac{1}{x+1}$$ 1

4. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = s(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 2)

$\ddot{y}_h + 2\dot{y}_h - 8y_h = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ 1/2

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4$ je 1/2 = 1

$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{4t}$ 1/2

(b) Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für

$$s(t) = 12\,\mathrm{e}^{-4t}$$

(/ca. 2)

λ_1	λ_2	m	α	β	q
2	-4	0	-4	0	1

$\alpha = -4 = \lambda_2 \Rightarrow q = 1$ 1

Ansatz: $y_p = A \cdot t \cdot e^{-4t}$ 1

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung.

$$\dot{y}_p = A \cdot e^{-4t} - 4At \cdot e^{-4t}$$ 1/2 (/ca. 3)

$$\ddot{y}_p = -4A \cdot e^{-4t} - 4A \cdot e^{-4t} + 16A \cdot t \cdot e^{-4t}$$ 1

$$= -8A \cdot e^{-4t} + 16At \cdot e^{-4t}$$

Einsetzen in DGL:

$$e^{-4t}\left(-8A + \cancel{16At} + 2A - \cancel{8At} - \cancel{8At}\right) = 12e^{-4t}$$ 1/2

$$\Rightarrow -6A = 12 \Rightarrow A = -2$$

$$\Rightarrow y_{ges} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-4t} - 2t e^{-4t}$$ 1

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung und den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ (Aufgabenteil (c) verwenden!!!).

(/ca. 3)

$$y_{ges}(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \quad \text{I}$$ 1/2

$$y'_{ges}(0) = 0$$

$$y'_{ges} = 2C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{-4t} - 2e^{-4t} + 8te^{-4t}$$ 1/2

$$\Rightarrow y'_{ges}(0) = 2C_1 - 4C_2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 - 2C_2 = 1 \quad \text{II}$$ 1/2

$$\text{I} - \text{II} \Rightarrow C_2 = 0 \quad \text{in I} \Rightarrow C_1 = 1$$ je 1/2 = 1

$$\Rightarrow y_{ges} = e^{2t} - 2t e^{-4t}$$ 1/2

5. **Aufgabe: Taylorreihen** (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f(x) = \big(\ln(x^2+1)\big)^2 .$$

ACHTUNG: Aufgabenteil (c) und (d) können Sie für die Funktion f bearbeiten ohne (a) und (b) gelöst zu haben.

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung von der Funktion f.

(/ca. 4)

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$$

$$= \frac{4x \cdot \ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

1,5

$$f''(x) = \frac{\left(4 \cdot \ln(x^2+1) + 4x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right)\cdot(x^2+1) - 4x \cdot \ln(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4 \cdot (x^2+1) \cdot \ln(x^2+1) + 8x^2 - 8x^2 \cdot \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

2,5

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bis zur Potenz $(x-1)^2$.

(/ca. 2)

$f(1) = (\ln 2)^2$ 1/2

$f'(1) = 2 \cdot \ln 2$ 1/2

$f''(1) = 2$ 1/2

$$\Rightarrow T_2(x) = (\ln 2)^2 + 2 \cdot \ln 2 (x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2$$

$$= (\ln 2)^2 + 2 \cdot \ln 2 (x-1) + (x-1)^2$$

1/2

Fortsetzung Aufgabe: Taylorreihen

(c) Erstellen Sie eine Wertetabelle der Funktion f und des Taylorpolynoms aus Aufgabenteil (b) für 5 x-Werte aus $[-1; 3]$.

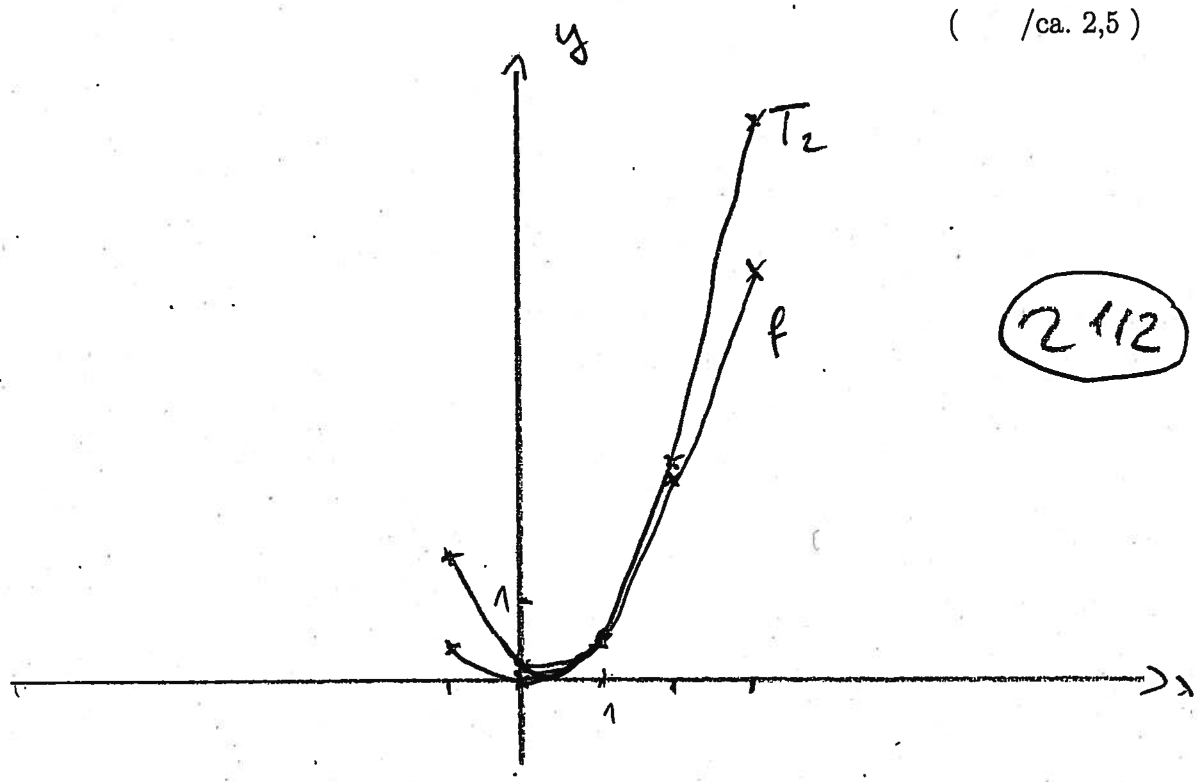
(/ca. 2,5)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,48	0	0,48	2,59	5,30
$T_2(x)$	1,71	0,09	0,48	2,87	7,25

je 0,25 = 2,5

(d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f, sowie den Graph des Taylorpolynoms aus Aufgabenteil (b) in ein gemeinsames Koordinatensystem ein, mit $1LE = 1cm$.

(/ca. 2,5)



2 1/2

6. **Aufgabe: Newton-Verfahren** (/ ca. 6 Punkte) 4 Nach-kommastellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob das Konvergenzkriterium des Newtonverfahrens:

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1$$

für den Startwert $x_0 = 0{,}5$ erfüllt ist. 1/2

(/ca. 3)

1/2 $f'(x) = -e^{-x} - 1$, $f'(0{,}5) = -1{,}6065$

1/2 $f''(x) = e^{-x}$, $f''(0{,}5) = 0{,}6065$ 1/2

$f(x) = e^{-x} - x$, $f(0{,}5) = 0{,}1065$ 1/2

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| = 0{,}027 < 1$$ 1/2

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens angenähert die Nullstelle von f. Brechen Sie das Verfahren ab, wenn sich die 3. Nachkommastelle nicht mehr ändert.

(/ca. 3)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5663$$ 1/2

$f(x_1) = 0{,}0013$, $f'(x_1) = -1{,}5676$ $\Big\}$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}5671$ 1/2

$f(x_2) = 0{,}0001$, $f'(x_2) = -1{,}5672$ $\Big\}$ $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}5672$ 1

$\Rightarrow$