Für Frau Klepfer mit besten Grüßen, AS → Hr. Schwägerl

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN — FACHBEREICH 03 FA — WS 1998/99

VORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, keine Taschenrechner
Aufgabensteller:	Axt, Plöchinger, Schwägerl

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

11

Aufgabe 1: Durch $x = 9t - t^3$ und $y = t^2 + 1$ mit $-3 \le t \le 3$ ist eine symmetrische Kurve $\mathcal{C}$ in der (x,y)-Ebene in Parameterform gegeben. Ermitteln Sie

a) die Schnittpunkte $S_1(x,y)$ und $S_2(x,y)$ von $\mathcal{C}$ mit der y-Achse,

$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow t\cdot(9-t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ oder $t = \pm 3$ — alle t.

$t = 0 \Rightarrow y = 1$, $\underline{t = \pm 3} \Rightarrow y = 10 \Rightarrow$

je 1 $S_1(0,1)$, $S_2(0,10)$ = Doppelpunkt (3)

b) die Punkte $V_1(x,y)$ und $V_2(x,y)$ von $\mathcal{C}$ mit vertikaler Tangente,

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \infty$, $\dot{y} \neq 0$, $\dot{x} = 9 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

je 1 $x = \pm(9\sqrt{3} - (\sqrt{3})^3) = \pm 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$, $y = (\pm\sqrt{3})^2 + 1 = 4$

$V_1(6\sqrt{3}, 4)$, $V_2(-6\sqrt{3}, 4)$ (3)

c) den Krümmungsradius ρ von $\mathcal{C}$ im Kurvenpunkt $S(0,1)$, a) $\Rightarrow t = 0$

Abl.: 1 $\dot{x} = 9 - 3t^2 = 9$, $\ddot{x} = -6t = 0$, $\dot{y} = 2t = 0$, $\ddot{y} = 2 \Rightarrow$

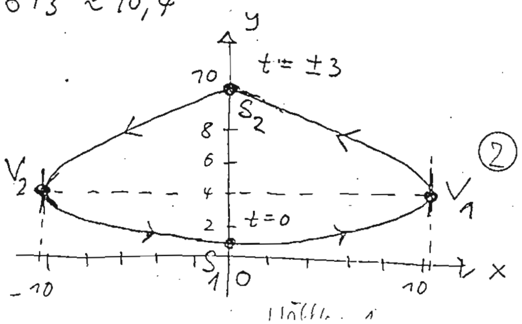
K: +2 $\kappa = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2}} = \frac{18 - 0}{[9^2 + 0^2]^{3/2}} = \frac{2\cdot 9}{9^3} = \frac{2}{81} \Rightarrow$

$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{81}{2} = \underline{\underline{40{,}5}}$ (3)

d) eine Skizze von $\mathcal{C}$. Hinweis $6\sqrt{3} \approx 10{,}4$

t	0	$\pm\sqrt{3}$	± 3
x	0	$\pm 6\sqrt{3}$	0
y	1	4	10
$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y'$	0	∞	$\mp\frac{6}{18} = \mp\frac{1}{3}$
	S_1	$V_{1,2}$	S_2

$\frac{2t}{9-3t^2}$



(2)

9

Aufgabe 2: Die ebene Kurve $\mathcal{C}$ ist in Polarform gegeben durch $r = \sqrt{3\pi\phi - 2\phi^2}$ im Winkelbereich $0 \le \phi \le \frac{3\pi}{2}$. Bestimmen Sie

a) die Schnittpunkte $S_1(x,y)$ und $S_2(x,y)$ von $\mathcal{C}$ mit der x-Achse,

$\varphi = 0$: $r = 0 \Rightarrow x = 0;\ y = 0$

$\varphi = \pi$: $r = \pi \Rightarrow x = -\pi,\ y = 0$

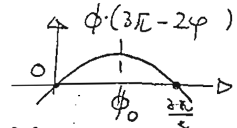
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ↓ ($S_1 = S_3$!)

je 1 $S_1(0,0)$, $S_2(-\pi, 0)$ (2)

b) den Winkel ϕ_0, bei dem der Radius r maximal ist,

$\dot{r} = \frac{3\pi - 4\phi}{2\sqrt{\ldots}} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4} = \phi_0 \Rightarrow r_0 = \sqrt{3\pi\cdot\frac{3\pi}{4} - 2\cdot\frac{9\pi^2}{16}} = \sqrt{\frac{9\pi^2}{8}} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \approx 3{,}3$

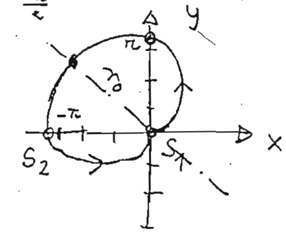
$\underline{\phi_0 = \frac{3\pi}{4}}$ anders:



(2)

c) eine Skizze von $\mathcal{C}$. Hinweis: $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \approx 3{,}3$,

φ	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
r	0	r_0	0	π	π



mit Tang. in 0 erkennbar (2)

r_0: +1 Skizze

d) den Inhalt A der von $\mathcal{C}$ umschlossenen Fläche. $\beta = \frac{3\pi}{2}$

$A = \frac{1}{2}\int_0^{\beta = 3\pi/2} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\beta}[3\pi\phi - 2\phi^2]\,d\varphi =$ (3)

$= \frac{1}{2}\left[3\pi\frac{\beta^2}{2} - 2\frac{\beta^3}{3}\right] = \frac{\beta^2}{2}\cdot\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{2\beta}{3}\right] = \frac{\beta^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{9\pi^3}{16}}}$

12

Aufgabe 3: Sei $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ die Gleichung einer Fläche $[F]$. Ermitteln Sie

a) den Extrempunkt $E(x_E, y_E, z_E)$ von $[F]$,

$f_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 = x_E$ — $D = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2\cdot 2 - 0 = 4$

$f_y = 2y - 4 \Rightarrow\ \Rightarrow y = 2 = y_E$ — $D, f_{xx} > 0 \Rightarrow E$ = Minimum

$E(1,2,0)$, $z_E = 1 + 4 - 2 - 8 + 5 = 0$ (4)

b) die Gleichung der Tangentialebene τ von $[F]$ im Punkt $P(2,3,2)$,

$\tau: z = 2 + f_x\cdot(x-2) + f_y\cdot(y-3) = 2 + 2\cdot(x-2) + 2\cdot(y-3)$ (3)

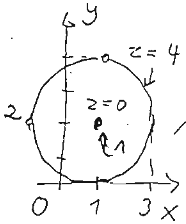
$= \underline{-8 + 2x + 2y}$ ← ~~leider falsch~~ zusammengefasst / Grund 2

$f_x = 2x_0 - 2 = 2$

$f_y = 2y_0 - 4 = 2$

c) die Skizzen der Höhenlinien von [F] zu den Höhen $z = 0$ und $z = \ldots$

$$z = f(x,y) = (x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) = (x-1)^2+(y-2)^2$$ 1



$z = 0:\quad (x-1)^2+(y-2)^2 = 0 \Rightarrow HL = (1,2) = \underline{\text{Punkt}}$ 1

$z = 4:\quad (x-1)^2+(y-2)^2 = 4 \Rightarrow HL = \frac{\text{Kreis um}}{\text{mit Radius 2}}\ M(1,2)$ 3

5

11

Aufgabe 4: Gegeben sei die DGL $y' = \frac{xy}{x+1}$. Ermitteln Sie

a) die allgemeine Lösung der DGL,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot y}{x+1} \Rightarrow \ln y = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= \int\left[1 - \frac{1}{x+1}\right]dx = x - \ln(x+1) + C \Rightarrow e^{\cdots}$$

$$y = K\cdot\frac{e^x}{x+1}\ ,\ \left[K = e^C\right]$$ 1

4

b) die Gleichung der Lösungskurve $\mathcal{L}$ der DGL durch den Punkt $P(0,1)$,

$$x = 0 \underset{a)}{\Rightarrow} y = k\,\frac{e^0}{1} = k \overset{!}{=} 1 \Rightarrow K = 1 \overset{a)}{\Rightarrow}$$

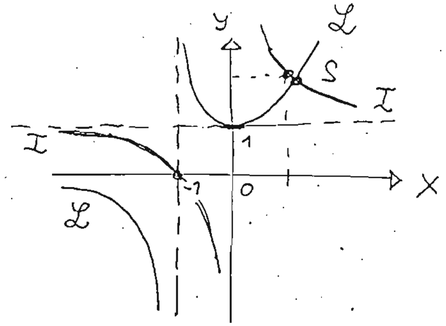
$$\mathcal{L}: y = \frac{e^x}{x+1}$$

1

c) eine Skizze von $\mathcal{L}$,

3

	x	-1	0	$-\infty$	∞
$\mathcal{L}$:	y	∞	1	0	∞
	y'		0		



d) eine Skizze der Kurve $\mathcal{I}$, die implizit gegeben ist durch $\frac{xy}{x+1} = 1$. $\Rightarrow$

2

$x\cdot y = x+1 \Rightarrow$

x	0	-1	$\pm\infty$	1
y	∞	0	1	2

(Skizze oben) 1

$\mathcal{I}: y = 1 + \frac{1}{x}$ ← umf. 1

e) $\mathcal{L}$ schneide $\mathcal{I}$ in einem Punkt S . Welche Steigung K hat $\mathcal{L}$ in S ?

$K = 1$

1

6

Aufgabe 5: Se[...] die Kurve von Aufgabe 1. Ermitteln Sie

a) eine Integralformel $s = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ für die Bogenlänge s von $\mathcal{C}$.

$\alpha = -3\ ,\ \beta = +3\ ,\ f(t) = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} =$

2

$= \sqrt{(9-3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(81 + 9t^4 - 54t^2) + 4t^2}$ 1 mit Frage

$= \underline{\underline{\sqrt{81 - 50t^2 + 9t^4}}}$

b) mit der SIMPSON-Formel zur Schrittweite $h = \Delta t = 1$ eine Näherung S der Bogenlänge s bei den Werten

t	0	1	2	3
$f(t)$	9	$2\sqrt{10}$	5	$6\sqrt{10}$
	3	2	1	0 = i
		4	5	6

: $f(-t) = f(+t)$

$S =$

4

für n=6 richtig 1

$$= \frac{h}{3}\Big[\underset{f(-3)}{z_0} + 4\cdot(\underset{f(-2)}{z_1} + \underset{f(0)}{z_3} + \underset{f(2)}{z_5}) + 2\cdot(\underset{f(-1)}{z_2} + \underset{f(1)}{z_4}) + \underset{f(3)}{z_6}\Big]$$

3

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[6\sqrt{10} + 4\cdot(5 + 9 + 5) + 2\cdot(2\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) + 6\sqrt{10}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\cdot\left[20\sqrt{10} + 76\right]}} = \frac{139{,}24\ldots}{3} = 46{,}415\ldots$$

$\underline{\text{exakt}}$: $S = 47{,}57\ldots$

$z_i \doteq f(x_i)\ ,\quad x_i \doteq -3 + i\cdot h = -3 + i\ ,\ i = 0,\cdots,6$

11
10
11
11
6

0 - 16	5
17 - 25	4
26 - 34	3
35 - 42	2
43 - 50	1