FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 99/00

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller: Axt, Eich, Kloster, Plöchinger, Radtke, Schwägerl

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: Die Fläche $[F]$ habe die Gleichung $z = f(x,y) = \frac{x^2}{2} + x \cdot y^2 - x$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} und f_{xy} von $z = f(x,y)$.

$f_x = x + y^2 - 1 , \quad f_y = 2xy$

$f_{xx} = 1 , \quad f_{xy} = 2y , \quad f_{yy} = 2x$

b) Ermitteln Sie die extremalen Punkte $E(x,y,z)$ und Sattelpunkte $S(x,y,z)$ von $[F]$. Hinweis: S ist ein Sattelpunkt, wenn in S gilt $f_x = f_y = 0$ und $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$.

$f_x = x + y^2 - 1 = 0 \; (1)$ und $f_y = 2xy = 0 \Rightarrow$

1. Fall: $x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = \pm 1 \Rightarrow z = 0 , \; D \doteq f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 - 4 < 0$

$\Rightarrow \underline{S(0, \pm 1, 0) \text{ Sattel}}$

2. Fall: $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \quad D = 1 \cdot 2 - 0 = 2 > 0 , \; f_{xx} > 0$

$\Rightarrow \underline{E(1, 0, -\tfrac{1}{2}) \text{ Minimum}}$

c) Sei τ die Tangentialebene, die $[F]$ in einem Punkt $A(x_0, y_0, z_0)$ berührt. Wählen Sie den Punkt A auf $[F]$ so, daß τ *parallel* zur Ebene ϵ : $z = 13 - x + 2y$ ist. Hinweis: die Ebenen τ und ϵ sind *parallel*, wenn sie in x- und y-Richtung die selben Steigungen haben.

$f_x = -1 \overset{a)}{\Rightarrow} x_0 + y_0^2 - 1 = -1 \Rightarrow x_0 = -y_0^2$

$f_y = 2 \overset{b)}{\Rightarrow} 2x_0 y_0 = 2 \quad \xrightarrow{\;\;} -2y_0^3 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$

$\Rightarrow x_0 = -1 \Rightarrow z_0 = 1/2 - 1 + 1 = 1/2$

$\Rightarrow \underline{A(-1, -1, \tfrac{1}{2})}$

Aufgabe 2: Bei der Härteprüfung wird eine gehärtete Stahlkugel vom Radius R mit vorgegebener Kraft K in die ebene Oberfläche des Testmaterials gedrückt. Die *Brinell-Härte* des Materials ist dann definiert durch $H = \frac{K}{2\pi R \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)}$, wobei r der Radius der eingedrückten Kugelkappe ist.

a) Ermitteln Sie die Konstante p so, daß gilt $H = p \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2x^2}$ mit $x = \frac{r}{R}$.

$H = \frac{K}{2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2})} = \frac{K}{2\pi R^2 (1 - \sqrt{1 - x^2})} = \frac{K}{2\pi R^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\;}}{(1 - (\sqrt{\;})^2)}$

$= \frac{K}{\pi R^2} \; \frac{1 + \sqrt{\;}}{2x^2} \quad \Rightarrow$

$p = \frac{K}{\pi R^2}$

b) Zeigen Sie: bei $x = \frac{r}{R} \approx 0$ hat man die Näherung $H \approx p \cdot \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right]$. Hinweis: verwenden Sie die Formel für H in a) und machen Sie eine geeignete Taylor-Entwicklung.

$x \approx 0 \overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow} \sqrt{1 - x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{2} - \frac{1}{8}(-x^2)^2 + \ldots \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow H \approx p \cdot \frac{1 + \left[1 - \frac{x^2}{2}\right]}{2x^2} = p \cdot \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right]$

Aufgabe 3: Ermitteln Sie von der 2π-periodischen Funktion $y = f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

a) die Fourier-Koeffizienten a_n für $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ und b_1 ,

$f(x)$ ungerade $\Rightarrow \underline{a_n = 0}$ für $n = 0, 1, 2, \cdots$ und

$\underline{b_1} = \frac{4}{2\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \left[\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos x\right] dx =$

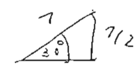
NR: $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \pi/2$ $\quad \Big| \; \underset{NR}{=} \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \underline{\underline{1}}$

$\int_0^\pi \sin^2 x \cdot \cos x \, dx \; \frac{t = \sin x}{\frac{dt}{dx} = \cos x} \; \int_0^0 t^2 \, dt = 0$

b) die Nullstellen und Extrema im Intervall $[0, \pi]$.

$\underline{y = 0} : \Rightarrow$ 1. Fall: $\sin x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \in 0, \pi}}$

2. Fall: $\cos x = -1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pi}}$



$y' = \cos x \cdot (1 + \cos x) + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= \cos x + 2\cos^2 x - 1$

$\underline{y' = 0} : t := \cos x \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

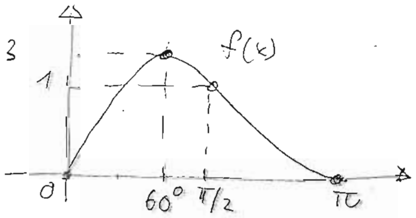
1. Fall: $t = \cos x = -1 \Rightarrow x \mathrel{\hat{=}} 180°$

2. Fall: $t = \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \mathrel{\hat{=}} 60°$

c) Skizzieren Sie den Graphen von $y = f(x)$ für $x \in [0, \pi]$.

x	0	60°	90°	180°
$\cos x$	1	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$\sqrt{3}/2$	1	0
y	0	$3\sqrt{3}/4$	1	0
y'	2	0	-1	0

$\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}3$



Aufgabe 4: Die Kurve C in der (x, y)-Ebene ist gegeben durch die Gleichung $y = f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ mit $0 \le x \le 1$.

a) Zeigen Sie, daß C das Bogenelement $ds = \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ hat.

$$y' = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3}\right) = -\frac{\sqrt{1 - x^{2/3}}}{x^{1/3}} \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{(1 - x^{2/3})}{x^{2/3}}}\, dx = \sqrt{\frac{1}{x^{2/3}}}\, dx = \frac{dx}{x^{1/3}}$$

b) Ermitteln Sie die Länge L von C,

$$L = \int ds = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

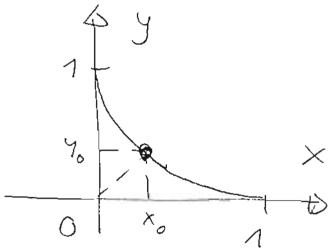
c) den Inhalt A_y der Mantelfläche, die bei der Rotation von C um die y-Achse entsteht,

$$A_y = 2\pi \int x\, ds = 2\pi \cdot \int_0^1 x^{2/3}\, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^{5/3}}{5/3}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3}{5} = \frac{6\pi}{5} = 3.769\ldots$$

d) eine Skizze von C.

x	0	1
y	1	0
y'	∞	0



$x_0 = y_0 \Leftrightarrow x_0^{\frac{2}{3}} = 1 - x_0^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$

$x_0^{2/3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2^{3/2}} = 0{,}353\ldots$

Aufgabe 5: Ermitteln Sie die Lösung $y = \varphi(x)$ der DGL $y'' = \frac{1 + (y')^2}{y}$ mit $y = 1$ und $y' = 0$ an der Stelle $x = 0$.

$$v = y' \Rightarrow y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v \quad \text{in DGL:}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dy} \cdot v = \frac{1 + v^2}{y}} \quad \text{v-DGL. Lösung: Trennen d. Var.} \Rightarrow$$

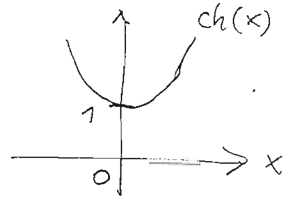
$$\frac{dy}{y} = \frac{v}{1 + v^2}\, dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{2v}{1 + v^2}\, dv \overset{\int}{\Rightarrow} \ln y = \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) + C_1$$

$$\overset{e^{\cdot}}{\Rightarrow} y = C \cdot \sqrt{1 + v^2} \overset{AB}{\Rightarrow} C = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 + v^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{y^2 - 1}}}, \quad v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx \overset{\int}{\Rightarrow}$$

$$\operatorname{ar\,ch} y = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = x + C_2 \Rightarrow y = \operatorname{ch}(x + C_2)$$

$$\overset{AB}{\Rightarrow} C_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = \operatorname{ch}(x)}}$$



Anmerkungen: habe

* die Hinweise zu A1 nach Vorschlag von Hr. Radtke gemacht;
* A2 etwa nach Vorschlag von Hr. Schwägerl umformuliert. Zu A2 b): Die Frage nach a und b für die Näherung $p\left[\frac{a}{x^2} + b\right]$ von H ist ungünstig, da a und b nur bei der Binomialentwicklung von $\sqrt{1 - x^2}$ eindeutig bestimmt sind. Daß sie aber $\sqrt{1 - x^2}$ entwickeln müssen, sollen die Studenten selber rauskriegen;
* in A4 a) die Formel für ds angegeben, da diese schwer zu ermitteln ist (Hinweis von Hr. Schwägerl). Damit kann man dann in b) und c) L und A_y leicht berechnen, wenn man die entsprechenden Formeln kennt.
* ~~Die~~ Die Bezeichnung O in A4 wäre hier nicht irreführend, da der Koordinatenursprung hier nicht bezeichnet wird.

Dieses Lösungsblatt bitte wegen der Punktevergabe zur Prüfung mitnehmen. Mit freundlichen Grüßen

E. P.