FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA SS 2000

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Graphikdisplay
Aufgabensteller:	Axt, Eich-Soellner, Plöchinger

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = x \cdot e^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie hierzu

a) das *Extremum* x_0 ,

$y' =$

$x_0 =$

b) das Integral $I = \int\limits_0^2 f(x)\, dx =$

c) das *MacLaurin-Polynom* $T_3(x)$ der Ordnung $n = 3$,

$T_3(x) =$

d) das Integral $\tilde{I} = \int\limits_0^2 T_3(x)\, dx =$

e) den *Grenzwert* $y_\infty = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$.

$y_\infty =$

f) Skizzieren Sie $y = f(x)$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 2: Sei $y = f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ , für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \text{ , für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{array} \right\}$ eine *ungerade* 2π-periodische Funktion.

a) Skizzieren Sie $y = f(x)$ im Bereich $-\pi \leq x \leq 2\pi$,

b) berechnen Sie von $y = f(x)$ die *Fourier-Koeffizienten* a_n und b_n für $n = 1, 2, 3, 4$,

$a_n =$

$b_n =$

$b_1 =$ $\quad$ $b_2 =$ $\quad$ $b_3 =$ $\quad$ $b_4 =$

c) ermitteln Sie von $y = f(x)$ das *Fourier-Polynom* $F_4(x)$ der Ordnung $n = 4$.

$F_4(x) =$

Aufgabe 3: Die Viertelellipse $\mathcal{E}$ mit den Radien a und b ist in Parameterform gegeben durch $x = a \cdot \cos t$ und $y = b \cdot \sin t$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{E}$ hat die *Länge* $L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\; dt$,

b) nach der *Faßregel von Kepler* gilt $L \approx L^* = \frac{\pi}{12} \left[a + b + 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right]$.

Aufgabe 4: Das Wasser in einem Zylinderbottich vom Radius R entleert sich durch ein kleines Loch vom Radius r am Boden. Die zeitabhängige Pegelhöhe $y = \varphi(t)$ des Wassers erfüllt die DGL

$$\dot{y} = -\kappa \cdot \sqrt{y} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \quad \text{und} \quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

a) Berechnen Sie die *allgemeine Lösung* y der DGL.

b) Zeigen Sie: $y = \left[\sqrt{y_0} - \frac{\kappa}{2}\, t \right]^2$ ist die *spezielle Lösung* der DGL mit $y = y_0$ bei $t = 0$.

c) Sei jetzt $r = 2$ cm und $R = 20$ cm und $y_0 = 1$ m. Nach welcher Zeit T ist der Bottich leer?

$T =$

Aufgabe 5: Die Koordinaten der Punkte $P(x, y, z)$ einer Fläche $\mathcal{F}$ im Raum erfüllen die Gleichung $(x-2)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{z}\right)^2 = 5 - z^2$.

a) Ermitteln Sie die implizite Gleichung, den *Typ* und die Bestimmungsgrößen der Schnittkurve $\mathcal{E}_c$ von $\mathcal{F}$ mit der Ebene $z = c$ für die Höhen $0 < c \leq \sqrt{5}$.

b) Skizzieren Sie $\mathcal{E}_c$ für $c = 1$.

c) Zeigen sie: $\mathcal{E}_c$ umschließt eine ebene Fläche mit dem Inhalt $A(c) = 2\pi(5 - c^2)$.

d) Berechnen Sie das *Volumen* V des Körpers, der im Bereich $0 \leq z \leq \sqrt{5}$ durch $\mathcal{F}$ und die (x, y)-Ebene begrenzt wird.

$V =$