Fachhochschule München   Fachbereich 03 FA   SS 06

Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Warendorf, Pöschl, Selting, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 13 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' - \frac{6y}{3x+1} = x.$$

(a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld (im 1. Quadranten) für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_h' - \frac{6y_h}{3x+1} = 0$ mit Hilfe von Isoklinen (für $c = 0, c = \frac{1}{2}, c = 1, c = 2$). 1LE = 1cm, $0 \leq x \leq 4$.

(b) Lösen sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

(d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = \frac{1}{2}$.

2. **Aufgabe: Fourierreihen** **(/ ca. 11 Punkte)**

Gegeben ist die folgende Funktion mit der Periode $T = 4$

$$f(t) = -\frac{t}{2}, \quad \text{für} - 2 \leq t < 2, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-6, 6]$ und untersuchen Sie sie auf Symmetrie (1LE=1cm).

(b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 5. Glied an: $F_5(t)$.

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 13 Punkte)**
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y + 3.$$

Der Bereich B sei ein Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten A(0,0), B(1,0) und C(0,1). B einschließlich der Ränder sei der Definitionsbereich der Funktion.

(a) Zeichnen Sie den Bereich B und geben Sie ihn in der Form:
$x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq g(x)$ an.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers über B, der oben begrenzt wird durch $f(x, y)$.

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(c) Wo liegt das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y)$ auf dem Bereich B? Anleitung: Wenn $f(x, y)$ im Inneren von B keinen Extremwert hat, so müssen die Extremwerte auf dem Rand liegen.

4. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 7 Punkte)**

Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = \cos(3t), \quad y(t) = \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus und skizzieren Sie die Kurve (1LE=2cm). Beachten Sie: In den Punkten $t = \frac{\pi}{6}$ und $t = \frac{5\pi}{6}$ hat die Kurve einen Doppelpunkt, sie schneidet sich dort selbst.

t	$x(t)$	$y(t)$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{2\pi}{3}$		
$\frac{3\pi}{4}$		
$\frac{5\pi}{6}$		
π		

(b) Berechnen Sie die Werte t, für die die Kurve im Inneren des Definitionsbereiches ($0 < t < \pi$) waagerechte und senkrechte Tangenten hat. Berechnen sie auch die zugehörigen x, y Werte.

5. **Aufgabe: Fehlerrechnung mit totalem Differential** **(/ ca. 7 Punkte)**

Der Innendurchmesser D eines dünnen Rohres der Länge l kann wie folgt bestimmt werden. Das Rohr wird mit Quecksilber der Dichte ρ befüllt, die Masse m des benötigten Quecksilbers wird gewogen. Daraus kann dann der Durchmesser berechnet werden.

Folgende Werte werden gemessen:

- Dichte: $\rho_0 = 13,8\frac{g}{cm^3}$ mit einer Messungenauigkeit von $d\rho = \pm 0,8\frac{g}{cm^3}$.
- Masse: $m_0 = 55,4g$ mit einer Messungenauigkeit von $dm = \pm 0,5g$.
- Länge des Rohres: $l_0 = 74,2cm$ mit einer Messungenauigkeit von $dl = \pm 0,05cm$.

Der Durchmesser D berechnet sich nach der folgenden Formel

$$D = D(\rho, m, l) = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}}$$

(a) Berechnen Sie den Durchmesser D_0 mit den gemessenen Werten ρ_0, m_0 und l_0.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von D nach ρ, nach m und nach l.

(c) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler mit den oben gegebenen Messungenauigkeiten unter Verwendung des totalen Differentials.

6. **Aufgabe: Maple** **(/ ca. 9 Punkte)**

(a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=2cm).

```
> f:=(x,y)->x^2+y^2;
```

```
> plots[implicitplot](f(x,y)=1,x=-1..1,y=-1..1);
```

```
> fx:=D[1](f);
```

```
> fy:= D[2](f);
```

(a) Geben Sie die Maple-Befehle zur Bestimmung der Taylorreihe bis zum Grad 4 (T_4) der Funktion $f(x) = sin(x)$ um den Punkt $x_0 = \pi$ an. Geben Sie anschliessend die Befehle zur Berechnung des Integrals über T_4 im Intervall $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ an. Das Ergebnis soll abschliessend als Dezimalzahl angezeigt werden.