

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Grafikdisplay

Aufgabensteller: Pöschl, Kloster, Vielemeyer, Warendorf

**WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!**

| | | |
|-----------------|---------------|------------------|
| Name: | Geb.-Datum: | Punkte: / ca. 60 |
| Vorname: | Stud.-Gruppe: | Korr.: |
| Matrikelnummer: | | |
| Raum/Platz-Nr.: | Aufsicht: | Note: |

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung**

(/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = y(2 + y^2).$$

Lösen sie die obige Differentialgleichung 2. Ordnung unter den Anfangsbedingungen $x_0 = 0, y(x_0) = 0$ und $y'(x_0) = \sqrt{2}$.

Hinweise:

(a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung vom Typ $y'' = f(y)$.

Substituieren Sie $u = y'$ und fassen Sie u als Funktion von y auf.

(b) Schreiben Sie das sich ergebende Polynom 4. Grades in y in der Form $(a \cdot y^2 + b)^2$

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

2. Aufgabe: Fourierreihen

(/ ca. 14 Punkte)

Gegeben ist die folgende achsensymmetrische periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi$

$$f(t) = 2 \sin(2t), \quad \text{für } 0 \leq t < \pi, \quad \text{periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$ (1LE=0,5cm).

(b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

Fortsetzung Aufgabe: Fourierreihen

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 5. Glied an: $F_5(t)$.

3. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \ln(x^2 + y + 1).$$

- (a) Berechnen und zeichnen (1LE = 1cm) Sie die Höhenlinien $f(x, y) = c$ für $c = 0$ und $c = \ln(0,5)$.

- (b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(c) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte.

4. Aufgabe: Ebene Kurven

(/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = \ln(t), \quad y(t) = \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(a) Füllen Sie die Wertetabelle aus .

| t | $x(t)$ | $y(t)$ |
|------------------|--------|--------|
| 0,1 | | |
| $\frac{\pi}{6}$ | | |
| $\frac{\pi}{4}$ | | |
| $\frac{\pi}{3}$ | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | |
| $\frac{2\pi}{3}$ | | |
| $\frac{3\pi}{4}$ | | |

- (b) Berechnen Sie die Stelle t_w , für die die Kurve im Inneren des Intervalls ($0.1 < t < \frac{3\pi}{4}$) eine waagerechte Tangente hat. Berechnen sie auch die zugehörigen x_w, y_w Werte. Berechnen Sie zusätzlich die Krümmung und den Krümmungsradius an der Stelle t_w . (Falls Sie t_w nicht ermitteln konnten, berechnen Sie die Krümmung und den Krümmungsradius an der Stelle $t = \frac{1}{2}$)

Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

- (c) Skizzieren Sie die Kurve ($\mathcal{C} : x(t) = \ln(t), y(t) = \cos(2t), 0 \leq t \leq \pi, 1\text{LE}=4\text{cm}$), die waagerechte Tangente und den Krümmungskreis.

5. Aufgabe: Simpson-Verfahren und Reihenentwicklung (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$$

- (a) Berechnen Sie das Polynom $T_3(x)$ der Mc-Laurin-Reihe (Taylorreihe an der Stelle $x = 0$).

Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

- (b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} T_3(x) dx$

Fortsetzung Aufgabe: Simpson-Verfahren und Reihenentwicklung

- (c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ mit dem Simpson-Verfahren mit der Schrittweite $h = \frac{\pi}{8}$.

6. Aufgabe: Ausgleichskurve

(/ ca. 7 Punkte)

Bei einem Versuch wurden folgende Messungen gemacht. Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem (1LE=1cm) ein, entscheiden Sie sich, welche Ausgleichskurve geeignet ist und berechnen Sie sie.

| i | x_i | y_i | | |
|---|-------|-------|--|--|
| 1 | -2 | -0,98 | | |
| 2 | -1,5 | 0,02 | | |
| 3 | -1 | 1,02 | | |
| 4 | -0,5 | 1,96 | | |
| 5 | 0 | 2,95 | | |
| 6 | 0,5 | 4,02 | | |
| 7 | 1,0 | 5,01 | | |
| 8 | 1,5 | 5,96 | | |